数の体系と超準モデル

田 中 一 之 著

東京　裳　華　房　発行

Logic of Arithmetic

— Formal Systems and Non-standard Models —

by

Kazuyuki Tanaka

SHOKABO

TOKYO

はしがき

現代数学の世界をいくらか体験している人(数学・情報系の学部上級以上)のために少し歯ごたえがあって，そして嚙んで味のあるような「数学基礎論」の本を作ろうというのが，10年前に本書を計画し始めたときからの目標だった．

論理式の定義などをくどくど説明するような本はまどろっこしくて読めないとこぼす学生や研究者が私の周りに多かったので，そういう人のために基礎論のエッセンスがストレートに伝わる本を書きたかった．また10数年前から，基礎論の研究活動が，計算機科学への応用とテクニカルな抽象論に二極化されて，コアとなる数学の基礎との関わりが希薄になっているという批判の声(文献[田4]を参照)が高まっていたので，それに対して私なりの答えを出したいという野心もあった．

そのような思いを，研究室が近かった幾何学者の浦川 肇先生に屢々話していたところ，裳華房編集部の細木周治氏を紹介され，ある日三人で昼食の卓を囲みながら本書の企画がまとまった．いま考えてみると，青二才の私の思いつきをお二人ともよく真剣に聞き取ってくれ，またよく執筆の後押しをしてくれたものと心から感謝している．ご厚意に反してこんなに年月がかかってしまったのはひとえに私の力不足に依るものであるが，逆にこうしてやっと完成できたのはその間に私の講義やセミナーに参加してくれた熱心な学生たちから教えられ，また励まされることが多かったからである．

本書の構想を練っていた段階では全く意識になかったことだが，全容が固まった頃にハッと気付いたことがある．章の順序立てが，私自身が学んだ順になっていたのである．これは必然的でも一般的でもない順序だが，私にはとても自然に思えるものである．第1章の普遍代数と第2章の計算論は，私

が東京工業大学の学部 4 年生から大学院初年級の頃に，高橋(宝来)正子先生(現・国際基督教大学)のゼミで指導を受けたテーマである．それからカリフォルニア大学バークレイ校の博士課程に留学し，最初に師事したのがモデル理論の大家 R. Vaught 先生であり，その頃学んだ内容が第 3 章と第 4 章に当たる．第 5 章以降は私の研究テーマに直結する部分であるが，第 5 章と第 6 章の自然数論については L. Harrington 先生の下で学位論文を作成していた頃に学び，第 7 章と第 8 章の実数論は学位取得後に S. Simpson 先生(ペンシルバニア州立大学)との交流によって得たものが多い．但し，上記の先生や他の先生方からも筆者は多大な影響を受けているものの，本書における議論展開はあくまで筆者自身によるものだから，もし至らぬ点があるとすれば，その咎めは専ら私が受けるべきものと覚悟している．

ここで，本書の読み方について一般的なアドバイスをしておきたい．本書は，数学・情報系の基礎知識，特に抽象代数学の知識を前提として書かれている．しかし，十分な予備知識を持たない方でも時間さえかけていただければ，議論の根幹は理解してもらえるだろう．また，逆に本書を手掛かりに他分野の数学も勉強していただけるなら筆者として望外の幸せである．尚，文中の「問題」には数学的知識を仮定するものも多いので，自信のない方は巻末の略解を見ながら考えていただきたい．

すでにロジックの基本をどこかで学んでいる方が，数の体系に関する最近の基礎論の研究を知りたいという場合，第 5 章から読んでいただくのがよいだろう．ロジックの専門講義を受けたことのない方は，まず第 1 章から第 4 章までをじっくり読んでいただきたい．第 4 章までの部分は，筆者が東北大学の数学科で 4 年生と大学院生を相手に何度か講義をし，そのフィードバックを取り込んで手直ししてきたものである．特に 2000 年度の講義においては，当時の院生(坂本伸幸，竹内順二，中上亜矢子，橋本 理，上田 功，林憲二)と学振 PD の山崎 武氏(現・大阪府立大学助手)が協力して講義ノートをまとめてくれたので，それが本原稿の作成にも大いに役立った．

また，数学基礎論一般に対する著者の考え方をこの後の「序説」に述べておいた.

繰り返しになるが，本書は多くの人の協力なしにはできなかった. 原稿を読んでたくさんのミスを指摘してくれた学生もいれば，酒を交わしながら本を書くための教訓をいただいた先輩もいる. ここにお名前をあげることはかえってご本人には迷惑かもしれないし，また誰を書いて誰を書かないという判断も難しいので，先輩，同僚，学生，友人そして家族への謝辞は失礼させていただく. 最後に，出版校正の際には，細木周治氏に加えて，同じく裳華房編集部の三上 剛氏に大変お世話になったので，厚くお礼を申し上げたい.

2002 年 2 月

仙台にて

田 中 一 之

序　説

1　数学の意味と形式

どんな学問でも，その入り口の基本用語を正確な日常語で説明したり，またそれを正しく理解することは困難な作業である．言葉の曖昧さや多義性による誤解はいうまでもなく，特に基礎的な学問においては，言語機能の多層性が誤謬の原因になりうる．端的にいえば，言語には「**意味**」と「**形式**」という 2 つの機能があって，話し手と聞き手がお互いにどちらのチャンネルで話しているかを了解しないと対話が成り立たない．当たり前のことではあるが，こと数学に関しては，こうした通念の整理がなおざりにされていて，教育その他に支障をきたしているように見える．

例えば，「定数」という言葉は，間違いなく数学の基本用語である．しかし，中学・高校の数学教科書や一般向けの辞書類には，次のような判読し難い説明をしているものが多い．

いろいろな値をとって変化する文字を変数という．

これに対して，変化しない一定の数を定数という．

変数の方は「値が変化する文字」ということで理解できるにしても，「変化しない数」という表現においては，変化したりしなかったりする主体は何なのかと考えてしまう．付言しておくと，「関数 $f(x)$ が定数である」というような表現においてならば「定数」を「一定の数」と解することも妥当であるが，ここでは数式に現れる「変数」と「定数」を比較して説明しているのである．

英語で考えれば，少し見通しがよくなるかもしれない．上の場合の「定数」は単にコンスタント(constant)であり，コンスタント・ナンバーではない．ついでに「変数(variable)」「関数(function)」「級数(series)」なども英語と比較すると，語尾「数」が単に語呂合わせで付いているように見えて

くる．和算文化の上に西洋数学を翻訳した歴史をいまも引きずっているのであろう．因みに，「数学」の欧米語である mathematics も語源的には「学ぶ(to learn)」というくらいの意味である．

ここで，次の2つの文を比較してほしい．

(1a)　6は，偶数である．

(1b)　6は，定数である．

通常のコミュニケーションでは，これらは異なるチャンネルのメッセージと解すべきものである．わかりにくければ，次のような例はどうだろう．

(2a)　6は，9に2/3を掛けて得られる．

(2b)　6は，9を180°回転して得られる．

文(1a)と文(2a)は，記号6が意味する数6についての主張であり，文(1b)と文(2b)は，記号6そのものについての主張である．

言葉のチャンネルを厳密に区別するために，後者のケースでは次のように書くこともある．

(1b)　「6」は，定数である．

(2b)　「6」は，「9」を180°回転して得られる．

しかし，この書き方を徹底させると表現があまりにも煩雑になるし，じつは1つの表現を敢えて複数チャンネルで交信することも日常的にはままあって，各人が文脈から判断するしかないのである．

最後にもう一度，定数(constant)とは何かについて説明しておく．ある議論の中で意味を変えない，つまり固定した解釈をもつ記号もしくは記号列が定数である．数に限らず定まった対象を指す記号はすべて定数と呼ばれる．例えば，整数上の和算記号＋は，解釈が定まっているので，関数定数(function constant)である．他方，「任意の関数 $f(x)$ について…」というような場合，f は固定した意味を持たないので関数変数(function variable)である．

2 数学とメタ数学

言葉の「意味」と「形式」を峻別することの重要性はいろいろなところで指摘されている．記号学の用語では，記号の形態(シニフィアン)とその指示対象(シニフィエ)，言語学では，統語論(シンタックス)と意味論(セマンティクス)という分別があるが，我々は以下で「数学」と「メタ数学」という区別を用いる．「メタ」は，「について」または「超える」という意味のギリシャ語の接頭語であるが，「数学」と「メタ数学」を合わせたものが従来の数学である．

形式化の進んだ現代数学においては，与えられた公理系の内部における議論を「**数学**」，公理系そのものについての外側からの議論を「**メタ数学**」と呼ぶ．例えば，「6は偶数である」という命題は，自然数論の公理から論理的に導出される定理で，数学的な主張である．他方，「6は定数である」という命題は，その形式体系で「6」という記号を定数として用いるという約束，もしくはその理論の形態に関する観察事実であって，メタ数学的な主張になる．

しかし，日常的な状況では，ある命題を数学的な主張であると同時にメタ数学的な主張でもあると解釈しなければならないことも多い．例えば，「x^2+2x+2 は正である」はほぼ100％数学的主張ととれるが，「x^2+2x+2 は2次式である」の診断は難しい．文字列「x^2+2x+2」の特徴を述べているのだろうか，x^2+2x+2 が表す関数やグラフの性質を述べているのだろうか？　多くの場合，両方の主張を同時に含んでいると考えられ，それで大概は問題を生じない．しかし，次のステップの抽象化(例えば，2次式全体の集合を扱うこと)がすんなりできるかどうかは，この主張の多層性に気付いているか否かがポイントになる．(注．こうした混乱を抑えるため，数学基礎論では x^2+2x+2 が表す関数を $\lambda x.(x^2+2x+2)$ と記すことがある．)

さて，「数学」と「メタ数学」が意識的に分離され，「メタ数学」そのものが議論されるようになるのは，幾何学の公理の再検討が始まった19世紀のことである．その後，20世紀前半にメタ数学一般を扱う数学の分野として「数学基礎論」が誕生し，それが20世紀後半には計算機科学の基礎とも交流しながら発展してきた．20世紀以降の話は本文に回すことにし，ここでは「メタ数学」における最初の画期的な発見である射影幾何の相対原理について見ておこう．

3　射影幾何の相対原理

話を簡単にするため，2次元平面上で点と直線のみを扱う射影幾何を考える．**射影幾何**は，射影によって変わらない図形の性質を調べる幾何であり，ユークリッド幾何から長さや角度のような計量的な概念を除いたものになっている．ここでは，とりあえず「点」「直線」「(点)が(直線)の上にある」「(直線)が(点)を通る」という用語だけを用いる幾何学と考えておこう．

このような簡単な幾何でも，結構深みのある命題が表現できる．次の主張は**Pappos の定理**として知られる．2つの直線 l, l' の上に，それぞれ3つの点 A, B, C と A', B', C' がある．このとき，

（A と B' を通る直線）と（A' と B を通る直線）の交点,
（B と C' を通る直線）と（B' と C を通る直線）の交点,
（A と C' を通る直線）と（A' と C を通る直線）の交点

は，一直線上にある．

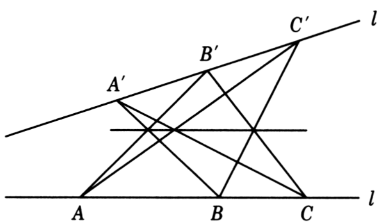


図 1　Pappos の定理

読みやすさのため多少表現を工夫してあるが，基本用語を論理的につなぐだけで定理が表現されていることに注意されたい．

さて，この幾何学の任意の命題 σ をとってきて，文中の「点」と「直線」の2語を入れ替えて，それにしたがって「(点)が(直線)の上にある」と「(直線)が(点)を通る」という述語も入れ替えると，全く別の意味をもつ命題 $\tilde{\sigma}$ ができる．この命題 $\tilde{\sigma}$ を σ の相対命題と呼ぶ．このとき，次のことがいえる．

射影幾何の相対原理　命題 σ が射影幾何の定理であれば，その相対命題 $\tilde{\sigma}$ も定理になり，逆も成り立つ．

例えば，Pappos の定理 σ に対する相対命題 $\tilde{\sigma}$ は次のようである．2つの点 A, A' を，それぞれ3つの直線 l, m, n と l', m', n' が通る．このとき，

（l と m' との交点）と（l' と m との交点）を通る直線，

（m と n' との交点）と（m' と n との交点）を通る直線，

（l と n' との交点）と（l' と n との交点）を通る直線

は，1点で交わる．

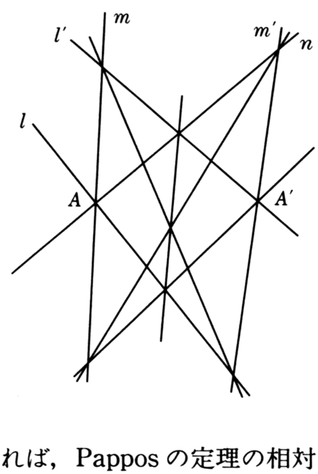


図 2　Pappos の定理の相対

相対原理を認めれば，Pappos の定理の相対は，証明しなくても成り立つ命題となる．では，相対原理自体はどうやって確かめられるのだろうか？

これには，射影幾何の各公理の相対命題が公理もしくは定理になっていることをいえばよい(射影幾何の公理系については，第3章の末尾の補足を参照)．相対原理は厳密に証明できる事実なので，定理と呼んでも間違いではないが，射影幾何の中で証明される定理ではなく，射影幾何の定理一般の性質を述べたメタ数学的主張であるから，**メタ定理**と呼ばれることが多い．

もう少し射影幾何について補足しておく．Pappos の定理をユークリッド幾何で考える場合，例えば（A と B' を通る直線）と（A' と B を通る直線）が交点をもつこと，つまり両直線が平行でないことを最初に仮定しておかなければならない．しかし，射影幾何ではどんな2直線も1点で交わるから，上のように前提条件を要しない命題が成り立つ．因みに，この幾何の直観的なモデルには，ユークリッド平面に1本の無限遠直線を付け加えたものがある．どの2つの平行直線も無限遠直線と1点で交わるというものである．

さて，相対原理をもう一度別の言葉で述べると，射影幾何の体系では「点」と「直線」の意味を入れ替えて解釈しても全く違いが生じないということになる．つまり，1つの形式体系に妥当な意味付けが複数あることになる．本文において，我々は大概の公理系には無数の意味付けがあること(Löwenheim-Skolem の定理など)を見る．こういう事実は確かに形式的手段の弱点であるが，それを逆手にとって数学的構造を調べる方法もある．ある構造の性質を調べるために，それと全く同じ命題を成り立たせる別の構造を作り，そちらを調べてその結果をもとの構造に移すというやり方である．これは一般に**超準的な手法**と呼ばれ，第4章で扱う超準解析学が代表的な応用例である．

4　記号処理

数学の公理系を外から扱うのがメタ数学であると述べた．公理系の扱い方にもいろいろな方法がありうるが，我々はそれを主として記号処理的に扱う．

敢えて「計算」を**数値計算**(意味)と**記号処理**(形式)に分けてみると，人間はどちらのタイプの計算をしているのだろうか？　例えば，「17に24を加えて41になる」という計算を考える．数値処理的な解釈だと，数字17がある約束(10進法)の下で指示するところの数値と数字24が指示するところの数値を足し合わせて，得られた数値をその表現である数字41に直すことになる．だが，数字を切り離して17や24の数値そのものを頭に思い描くのは困難であるし，実際足し算をするのに位毎に数字を加えたりしているのは，我々が記号処理をしている証拠である．

これは算術に留まらず，微積分でも同じである．微分は，極限の概念を用いて定義される高級な計算法であるが，記号操作としてみると，以下のように案外簡単な仕組みになる．

定義　変数 x, y と定数 $0, 1$ を演算 $+, \cdot$ および括弧 ( ) を用いて適当に組み合わせた文字列を(ここでの)項と呼ぶ．例えば，$((x+1)\cdot y)+x$ は項である．項を u, v などの文字で表す．項 u の x に関する(偏)微分 $D_x(u)$ は，次のルールを繰り返して適用することによって求まる．

R1．$D_x(x) \to 1$.

R2．$D_x(y) \to 0$, $D_x(0) \to 0$, $D_x(1) \to 0$.

R3．$D_x(u+v) \to D_x(u) + D_x(v)$.

R4．$D_x(u\cdot v) \to D_x(u)\cdot v + u\cdot D_x(v)$.

さらに項の簡約として，

R5．$u+0 \to u$, $0+u \to u$, $u\cdot 0 \to 0$, $0\cdot u \to 0$, $u\cdot 1 \to u$, $1\cdot u \to u$.

例えば，$((x+1)\cdot y)+x$ の微分は次のように計算される．

$D_x(((x+1)\cdot y)+x)$

$\to D_x((x+1)\cdot y) + D_x(x)$　　R3による

$\to (D_x(x+1)\cdot y + (x+1)\cdot D_x(y)) + 1$　　R4, R1による

$\to ((D_x(x) + D_x(1))\cdot y + (x+1)\cdot 0) + 1$　　R3, R2による

$\to ((1+0)\cdot y+0)+1$ 　R1, R2, R5 による

$\to (1\cdot y)+1$ 　R5 による

$\to y+1$ 　R5 による

ルール R1〜R5 の適用によって得られた結果が正しい微分であることは明らかだが，少し考えれば(上で定めた項に関する)すべての微分結果が，上のルールだけで導かれることがわかる．つまり，機械的な計算と，意味を考えながらの計算には，結果の上で全く差がないというわけである．

意味を分離した形式の扱いは，精神主義の傾向が強かった一時代前の我が国では極端に軽視あるいは蔑視されていたが，コンピュータが創るバーチャル現実の世界が人々の眼前に出現し，無意味な形式そのものが意味になりうることが実証されたいま，いよいよ「メタ数学」は「数学」と同じスタート地点についたといえるだろう．

目　次

第4章 モデルの理論

第5章 自然数論 形式体系編

第6章 自然数論 超準モデル編

第7章 実数論 代数編

第 8 章　実数論　解析編

1

等式の体系

本章では，ある理論が等式だけで公理化できるという特性と，その理論を成り立たせる代数構造のクラスがもつ諸性質(例えば，直積に関して閉じている)の関わりを調べる．ここでの主定理は，1.3 節で証明する Birkhoff の完全性定理と等式クラス定理であるが，それらの結果は後の章で論理記号を含んだ公理系に拡張され，理論の形態と構造の性質の関係を調べるという本書全体の主題に発展する．

1.1 等式理論 群を例として

本節では，群論を題材として，数学の証明がどのようになされているかを観察し，その形式化について考える．

定義 1.1.1 群の等式理論（単に**群論**(group theory)と呼ぶ）Gp は次の 3 つの公理からなる．

$$G_1：\ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \quad [\text{結合律}],$$
$$G_2：\ e \cdot x = x \quad [\text{左単位元}],$$
$$G_3：\ x^{-1} \cdot x = e \quad [\text{左逆元}].$$

上の 3 つの等式に現れる x, y, z は変数，e は定数であり，x^{-1} は 1 変数関数を表す．

いま，$\mathbf{G}$ を空でない集合とし，$\bullet$ を $\mathbf{G}$ 上の 2 変数関数，${}^{-1}$ を $\mathbf{G}$ 上の 1 変数関数，$\mathbf{e}$ を $\mathbf{G}$ の元とする．そして，公理の記述に現れる $\cdot, {}^{-1}, e$ を $\mathbf{G}$ 上でそれぞれ $\bullet, {}^{-1}, \mathbf{e}$ と解釈し，変数に $\mathbf{G}$ の任意の元を代入して各等号の両辺が同じ値になるとき，構造 $\mathfrak{G} = (\mathbf{G}, \bullet, {}^{-1}, \mathbf{e})$ を群論 Gp の**モデル**(model)，あるいは単に**群**(group)と呼ぶ．

一般に，公理系もしくは理論 T は命題（論理式）の集合であり，T に属するすべての命題（公理）を成り立たせる構造 $\mathfrak{M}$ を T の**モデル**と呼んで，$\mathfrak{M} \models T$ と記す．与えられた命題 σ が理論 T の任意のモデルで成り立つとき，σ は**理論 T で成り立つ**といい，$T \models \sigma$ と書く．

群論 Gp において成り立つ命題の例として，次の定理を見てみよう．

定理 1.1.2 $\mathrm{Gp} \models x \cdot x^{-1} = e$ ［右逆元］．

証明 $\mathfrak{G} = (\mathbf{G}, \bullet, {}^{-1}, \mathbf{e})$ を任意の群とする．$\mathbf{G}$ の任意の元 $\mathbf{a}$ を選んで，$\mathbf{a} \bullet \mathbf{a}^{-1} = \mathbf{e}$ を示せばよい．

まず，$\mathbf{a}\bullet\mathbf{a}=\mathbf{a}$ ならば $\mathbf{a}=\mathbf{e}$ を示そう．$\mathbf{a}\bullet\mathbf{a}=\mathbf{a}$ の両辺に $\mathbf{a}^{-1}$ を左から掛け，$\mathbf{a}^{-1}\bullet(\mathbf{a}\bullet\mathbf{a})=\mathbf{a}^{-1}\bullet\mathbf{a}$ を得る．この左辺は，

$$\begin{aligned}\mathbf{a}^{-1}\bullet(\mathbf{a}\bullet\mathbf{a}) &= (\mathbf{a}^{-1}\bullet\mathbf{a})\bullet\mathbf{a} && (G_1)\\ &= \mathbf{e}\bullet\mathbf{a} && (G_3)\\ &= \mathbf{a} && (G_2)\end{aligned}$$

となり，また右辺 $\mathbf{a}^{-1}\bullet\mathbf{a}$ は G_3 より $\mathbf{e}$ に等しいから，$\mathbf{a}=\mathbf{e}$ を得る．そして，

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}\bullet\mathbf{a}^{-1})\bullet(\mathbf{a}\bullet\mathbf{a}^{-1}) &= \mathbf{a}\bullet(\mathbf{a}^{-1}\bullet(\mathbf{a}\bullet\mathbf{a}^{-1})) && (G_1)\\ &= \mathbf{a}\bullet((\mathbf{a}^{-1}\bullet\mathbf{a})\bullet\mathbf{a}^{-1}) && (G_1)\\ &= \mathbf{a}\bullet(\mathbf{e}\bullet\mathbf{a}^{-1}) && (G_3)\\ &= \mathbf{a}\bullet\mathbf{a}^{-1} && (G_2)\end{aligned}$$

だから，上で示したことより，$\mathbf{a}\bullet\mathbf{a}^{-1}=\mathbf{e}$ となる．　□

問題 1　$\mathrm{Gp}\models x\cdot e=x$ ［右単位元］を示せ．

問題 2　Gp の公理 G_3 ［左逆元］を $x\cdot x^{-1}=e$ ［右逆元］に置き換えたものを Gp′ とする．このとき，Gp′ においては G_3 が成り立たないこと，すなわち $\mathrm{Gp}'\not\models x^{-1}\cdot x=e$ を示せ．

上の定理の証明は数学的には非の打ち所がないが，改めてよく考えてみると，任意の群 $\mathfrak{G}$ をもってきて，さらに任意の元 $\mathbf{a}$ を選んで議論するというのは，読み手の数学能力に頼った不確実な論法のようでもある．$\mathrm{Gp}\models x\cdot x^{-1}=e$ という主張は，読み手が想像しうる群のみに関して，あるいは現在までに知られている群の実例の範囲において右逆元があれば，それによって真であるといえるのだろうか？

もう一度定理の証明を眺めてみると，任意の群 $\mathfrak{G}$ とその任意の元 $\mathbf{a}$ を定めてしまえば，あとは単純な式変形になっている．その変形は，Gp の公理を出発点にして，等号に関する規則だけを使って得られるもので，その道筋は以下に述べるように完璧に舗装(形式化)できる．そうであれば，実はその

道にどんなものを通すかは問題でない．入り口を通るもの，つまり公理を満たすどんな構造も，必ず出口の主張(定理)を満たすことは明らかだからである．

それでは，正しい等式を形式的に導くための演繹体系を導入しよう．まず，対象となる理論の言語を規定しておかなければならないが，一般的な定義は次節に回して，ここでは群論の場合の $\cdot, {}^{-1}, e$ のような数学記号の集合と考えておけばよい．これらの記号と変数を，括弧を用いながら，適当に組み合わせてできる記号列を**項**(term)と呼ぶ．そして，2つの項 s, t に対し，記号列 $s = t$ を**等式**(equation)と呼ぶ．さて，与えた公理系 T のもとで，正しい等式だけを導く仕組み(演繹体系)を以下の定義1.1.3と定義1.1.4で定める．

定義 1.1.3　T を等式の集合とする．T の**等式理論**(equational theory)(これも T で表す)は，次の**公理**と**規則**からなる．

（1）　T に属する等式は公理である．

（2）　$t = t$ の形の等式は公理である．

（3）　以下の4つの図式は規則である．但し，s, t, s_i, t_i, u は項，x は変数，f は与えられた言語の関数(演算)記号である．

$$\frac{s = t}{t = s}\,(\mathrm{sym}), \qquad \frac{s = t \quad t = u}{s = u}\,(\mathrm{trans}),$$

$$\frac{s(x) = t(x)}{s(u) = t(u)}\,(\mathrm{sub}), \qquad \frac{s_1 = t_1 \ \cdots \ s_n = t_n}{f(s_1, \cdots, s_n) = f(t_1, \cdots, t_n)}\,(\mathrm{comp}).$$

ここで，公理(2)は等号の反射律であり，規則(sym)は対称律，規則(trans)は推移律を表している．規則(sub)は，変数 x の出現全部をある項 u で置き換える代入規則である．規則(comp)は，関数合成によって等号が保たれること(例えば，$s_1 = t_1, s_2 = t_2 \Rightarrow s_1 \cdot s_2 = t_1 \cdot t_2$)を保証するための規則である．

定義 1.1.4　等式理論 T における**証明木**(proof tree)(もしくは単に**証明**(proof))は，次のように帰納的に定義される．

（1）　公理の等式はそれ自身の証明木である．

（2）　P_i が $s_i = t_i$ の証明木で，

$$\frac{s_1 = t_1 \ \cdots \ s_n = t_n}{s = t}$$

が規則であるとき，

$$\frac{P_1 \cdots P_n}{s = t}$$

は $s = t$ の証明木である．

等式理論 T において，$s = t$ が証明木をもつことを次のように表す．

$$T \vdash s = t.$$

例 1　群論 Gp の形式体系において，

$$\cfrac{\cfrac{x^{-1}x = e \quad x^{-1} = x^{-1}}{(x^{-1}x)x^{-1} = ex^{-1}}\,(\mathrm{comp}) \qquad \cfrac{ex = x}{ex^{-1} = x^{-1}}\,(\mathrm{sub})}{(x^{-1}x)x^{-1} = x^{-1}}\,(\mathrm{trans})$$

は $(x^{-1}x)x^{-1} = x^{-1}$ の証明木である．これを P_1 とする．また，

$$\cfrac{\cfrac{(xy)z = x(yz)}{(x^{-1}x)x^{-1} = x^{-1}(xx^{-1})}\,(\mathrm{sub}) \times 3\text{ 回}}{x^{-1}(xx^{-1}) = (x^{-1}x)x^{-1}}\,(\mathrm{sym})$$

は $x^{-1}(xx^{-1}) = (x^{-1}x)x^{-1}$ の証明木である．これを P_2 とする．さらに，$(xx^{-1})(xx^{-1}) = x(x^{-1}(xx^{-1}))$ の証明木 P_3 も容易に構成できる．これらを用いて，$(xx^{-1})(xx^{-1}) = (xx^{-1})$ の証明木を次のように構成できる．

$$\cfrac{P_3 \qquad \cfrac{x = x \qquad \cfrac{P_2 \quad P_1}{x^{-1}(xx^{-1}) = x^{-1}}\,(\mathrm{trans})}{x(x^{-1}(xx^{-1})) = xx^{-1}}\,(\mathrm{comp})}{(xx^{-1})(xx^{-1}) = (xx^{-1})}\,(\mathrm{trans}).$$

問題 3　上の例を使って，$\mathrm{Gp} \vdash xx^{-1} = e$ の証明木を完成せよ．

問題 4　$\mathrm{Gp} \vdash xe = x$ の証明木を構成せよ．

さて，$\vdash$ と $\models$ の間には次の関係が成り立つことが知られている．

$$T \models s = t \Leftrightarrow T \vdash s = t.$$

つまり，等式 $s = t$ が理論 T で成り立つこと($T \models s = t$)が，$s = t$ の証明木という(読み手に依存しない)有限図式で完全に表せることになる．これは，数学の議論が完全に形式化できることを主張する **Gödel の完全性定理**(1930)の特別な場合であり，**Birkhoff の完全性定理**(1935)と呼ばれる．

Birkhoff の完全性定理は 1.3 節で証明するが，ここで証明のアイデアだけ述べておこう．$\Leftarrow$ の方は簡単にわかる．$\mathfrak{M}$ を T の任意のモデルとする．いま，$T \vdash s = t$ の証明木を考えると，最上段の等式はすべて公理だから，$\mathfrak{M}$ で成り立っている．そして，各規則の前提(上式)が $\mathfrak{M}$ で成り立てば，結論(下式)も成り立つことは容易に確かめられるから，証明木に含まれるすべての等式，特に最下式 $s = t$ も $\mathfrak{M}$ で成り立つことがわかる．

$\Rightarrow$ はそう簡単ではない．対偶を示すため，$T \nvdash s = t$ を仮定し

$$\mathfrak{M} \vdash T \text{ かつ } \mathfrak{M} \nvdash s = t$$

となる構造 $\mathfrak{M}$ の存在をいう．群の場合には，s, t に現れる変数の集合 V で生成される自由群 $\mathfrak{G}_V$ がそのような構造 $\mathfrak{M}$ である．($\mathfrak{G}_V$ は，e または $x_1{}^{n_1} \cdots x_k{}^{n_k}$ ($x_i \in V, x_i \neq x_{i+1}, n_i \neq 0$)の形の項の集合と，その上の自然な演算と見なせる．このとき，$\mathfrak{G}_V \models s = t$ とすれば，s, t は同じ項に簡約できるので，$\mathrm{Gp} \vdash s = t$ が導かれる．) 一般の等式理論に対しては，自由代数の作り方がもう少し複雑になるので，次節において必要概念を定義してから，1.3 節で証明を与える．

1.2 代数構造と準同型

要素間の関係を定めるものが等号 $=$ のみであるような構造を代数構造と呼ぶ．例えば，群や環は代数構造であり，それらの上に順序関係 $<$ が与え

られているなら代数構造ではない．本節では，代数構造に関する種々の基本概念を導入し，特に準同型定理を証明する．等号 $=$ 以外の関係を伴った一般の構造については，第 3 章以降で議論する．

定義 1.2.1 **代数言語**(algebraic language)とは，関数記号のリスト

$$\mathcal{L} = (f_0, f_1, \cdots)$$

で，各 f_i に**元数**(arity)と呼ばれる自然数 m_i が対応しているものである．すなわち，各 f_i は m_i 変数関数を表す記号であり，特に 0 変数関数記号は**定数**(constant)と呼ばれる．$\rho = (m_0, m_1, \cdots)$ を $\mathcal{L}$ の**類型**(similarity type)という．

注．代数言語 $\mathcal{L}$ に含まれる記号は，無限個(特に非可算個)あってもよい．

定義 1.2.2 **$\mathcal{L}$-代数**(algebra)(または **ρ-代数**もしくは**代数構造**)$\mathfrak{A}$ は，空でない集合 A と，$\mathcal{L}$ の n 変数関数記号 f に A 上の関数 $f^{\mathfrak{A}} : A^n \to A$ を割り当てる関数 $f \mapsto f^{\mathfrak{A}}$ で構成される．特に，0 変数関数記号すなわち定数 c には，A の元が対応する．$\mathcal{L} = (f_0, f_1, \cdots)$ であるとき，

$$\mathfrak{A} = (A\ ;\ f_0^{\mathfrak{A}}, f_1^{\mathfrak{A}}, \cdots)$$

とも書く．また，A のことを $\mathfrak{A}$ の**領域**(domain)(もしくは**宇宙**(universe))と呼んで，$|\mathfrak{A}|$ と書く．

注．以下では表記を簡単にするため，記号 f とその解釈 $f^{\mathfrak{A}}$ を同一文字(字体)で表すことがある．また，構造は類型をもっているだけで記号の使い方と構造の機能とは無関係であると考える立場もある．

例 2 群 $\mathfrak{G}$ は，代数言語 $\mathcal{L} = (\cdot, ^{-1}, e)$ における代数構造 $(\mathbf{G}, \bullet, ^{-1}, \mathbf{e})$ である．このとき，$\cdot^{\mathfrak{G}} = \bullet$，$(^{-1})^{\mathfrak{G}} = {}^{-1}$，$e^{\mathfrak{G}} = \mathbf{e}$ である．$\mathcal{L}$ の類型は $(2, 1, 0)$ である．

定義 1.2.3 代数言語 $\mathcal{L}$ における**項**(term)は，次のように帰納的に定義される．

(1) **変数** $x, y, z, \cdots$ は項である．

（2）　$t_0, \cdots, t_{n-1}$ を項，f を $\mathcal{L}$ の n 変数関数記号とするとき，$f(t_0, \cdots, t_{n-1})$ は項である．

特に，**定数**(0 変数関数記号)は項である．項 t に含まれるいくつかの変数(例えば x, y)に注目して，$t(x, y)$ のように記すことがある．そして，項 $t(x)$ に現れる変数 x をすべて項 s に置き換えてできる項を $t(s)$ のように表す．また，慣習にしたがって，2 変数関数 $f(x, y)$ は xfy のようにも表す．例えば，$+(x, y)$ を $x + y$ と書く．

以下，代数言語 $\mathcal{L}$ を 1 つ固定して，話を進める．特に明記しない限り，この言語における代数構造だけを考える．

定義 1.2.4　$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ を $\mathcal{L}$-代数とする．射 $\phi : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ が以下の条件を満たすとき，ϕ を**準同型**(homomorphism)と呼び，$\phi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ で表す．$\mathcal{L}$ の各 n 変数関数記号 f と，任意の $a_0, \cdots, a_{n-1} \in |\mathfrak{A}|$ について，

$$\phi(f^{\mathfrak{A}}(a_0, \cdots, a_{n-1})) = f^{\mathfrak{B}}(\phi(a_0), \cdots, \phi(a_{n-1}))$$

が成り立つ．さらに，ϕ が全単射であるとき，ϕ は**同型**(isomorphism)であるという．このとき，$\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}$ が**同型である**(isomorphic)ともいい，

$$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$$

で表す．

問題 5　次を示せ．$\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}$ が同型であるための必要十分条件は，2 つの準同型 $\phi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, $\psi : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ が存在して，それらの合成関数 $\psi \circ \phi$ と $\phi \circ \psi$ が共に恒等写像(id_A と id_B)になることである．

定義 1.2.5　$\mathfrak{A}$ を代数，$\equiv$ を $|\mathfrak{A}|$ 上の 2 項関係とする．このとき，$\equiv$ が $\mathfrak{A}$ 上の**合同関係**(congruence relation)であるとは，$\equiv$ が $|\mathfrak{A}|$ 上の同値関係(反射律，推移律，対称律を満たす)であって，すべての関数記号 f に対し，

$$a_0 \equiv b_0,\ \cdots,\ a_{n-1} \equiv b_{n-1} \Rightarrow f^{\mathfrak{A}}(a_0, \cdots, a_{n-1}) \equiv f^{\mathfrak{A}}(b_0, \cdots, b_{n-1})$$

が成り立つことである．

例 3 整数環 $\mathfrak{Z}=(\mathbb{Z},+,\cdot,-,0,1)$ において，$m\equiv_3 n \leftrightarrow$ ($m-n$ は 3 の倍数である) で定義される関係 $\equiv_3$ は合同関係である．

問題 6 $\mathfrak{H}$ を群 $\mathfrak{G}$ の正規部分群(任意の $g\in|\mathfrak{G}|, h\in|\mathfrak{H}|$ に対して，$ghg^{-1}\in|\mathfrak{H}|$)とする．$g_1\equiv_H g_2 \Leftrightarrow g_1 g_2^{-1}\in|\mathfrak{H}|$ で定まる $\equiv_H$ は合同関係であることを示せ．

一般に，集合 A 上に同値関係 $\equiv$ が与えられているとき，

$$\{x\in A : x\equiv a\}$$

を a $(\in A)$ の**同値類**(equivalent class)または**剰余類**(residue class)と呼び，$[a]$ と書く．そして，同値類全体を $A/\equiv$ で表す．代数 $\mathfrak{A}$ 上の合同関係 $\equiv$ を考えると，$|\mathfrak{A}|/\equiv$ にも $\mathfrak{A}$ から自然に演算が導かれ，代数 $\mathfrak{A}/\equiv$ が作られる．

定義 1.2.6 $\mathcal{L}$-代数 $\mathfrak{A}$ 上に合同関係 $\equiv$ が与えられているとする．このとき，$|\mathfrak{A}|/\equiv$ の上で，$\mathcal{L}$ の各関数記号 f の解釈 $f^{\mathfrak{A}/\equiv}$ を次のように定めて，$\mathcal{L}$-代数 $\mathfrak{A}/\equiv$ を作ることができる： f の元数を n とし，すべての $a_0,\cdots,a_{n-1}\in|\mathfrak{A}|$ について，

$$f^{\mathfrak{A}/\equiv}([a_0],\cdots,[a_{n-1}])=[f^{\mathfrak{A}}(a_0,\cdots,a_{n-1})].$$

この $\mathfrak{A}/\equiv$ を $\mathfrak{A}$ の**剰余代数**(factor algebra, quotient algebra)と呼ぶ．

注．上の定義において，$f^{\mathfrak{A}/\equiv}$ の値が(一意に)定まること，つまり $[a_0]=[a_0']$, $\cdots$, $[a_{n-1}]=[a_{n-1}']$ ならば $[f^{\mathfrak{A}}(a_0,\cdots,a_{n-1})]=[f^{\mathfrak{A}}(a_0',\cdots,a_{n-1}')]$ となることは，$\equiv$ が合同関係であることから直ちにいえる．

例 4 例 3 の合同関係に対して，$\mathfrak{Z}/\equiv_3$ を考える．まず，$\mathbb{Z}/\equiv_3=\{[0],[1],[2]\}$ である．そして，$\mathfrak{Z}/\equiv_3$ における演算は，次のように定まる．

$[m]+^{\mathfrak{Z}/\equiv_3}[n]=[m+n]$, $\quad [m]\cdot^{\mathfrak{Z}/\equiv_3}[n]=[m\cdot n]$, $\quad -^{\mathfrak{Z}/\equiv_3}[m]=[-m]$,
$0^{\mathfrak{Z}/\equiv_3}=[0]$, $\quad 1^{\mathfrak{Z}/\equiv_3}=[1]$.

例 5 $\mathfrak{H}$ を群 $\mathfrak{G}$ の正規部分群とすれば，$\mathfrak{G}/\equiv_H$ は通常の剰余群 $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ である．

補題 1.2.7　代数 $\mathfrak{A}$ 上に合同関係 $\equiv$ が与えられているとする．このとき，$\phi(a) = [a]$ は，準同型 $\phi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}/\equiv$ である．

剰余代数の定義から，上の補題の証明は明らかであろう．以下では，この補題の準同型 ϕ を $\pi_{\equiv}$ で表す．

補題 1.2.8　ϕ を代数 $\mathfrak{A}$ から代数 $\mathfrak{B}$ への準同型とする．いま，$|\mathfrak{A}|$ 上の 2 項関係 $\equiv$ を以下のように定義する．

$$a \equiv b \Leftrightarrow \phi(a) = \phi(b).$$

このとき，$\equiv$ は合同関係である．

証明　$\equiv$ が同値関係であることは明らかである．合同性をいうために，$a_0 \equiv b_0, \cdots, a_{n-1} \equiv b_{n-1}$ とすると，

$$\begin{aligned} \phi(f^{\mathfrak{A}}(a_0, \cdots, a_{n-1})) &= f^{\mathfrak{B}}(\phi(a_0), \cdots, \phi(a_{n-1})) && (\phi \text{ は準同型}) \\ &= f^{\mathfrak{B}}(\phi(b_0), \cdots, \phi(b_{n-1})) && (a_0 \equiv b_0, \cdots \text{ の仮定}) \\ &= \phi(f^{\mathfrak{A}}(b_0, \cdots, b_{n-1})) && (\phi \text{ は準同型}). \end{aligned}$$

よって，

$$f^{\mathfrak{A}}(a_0, \cdots, a_{n-1}) \equiv f^{\mathfrak{A}}(b_0, \cdots, b_{n-1}).$$

□

定理 1.2.9（**準同型定理**(homomorphism theorem)）　$\phi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ を全射とする．さらに，$\equiv$ を補題 1.2.8 で定義された合同関係とする．このとき，同型 $\phi_{\equiv} : \mathfrak{A}/\equiv \to \mathfrak{B}$ が存在し，$\phi = \phi_{\equiv} \circ \pi_{\equiv}$ となる(図 1)．

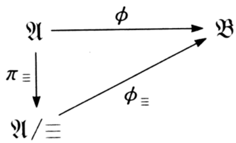


図 1

証明　まず，$\phi_{\equiv}([a]) = \phi(a)$ とおくことができる．なぜなら，$[a] = [b]$ ならば，$a \equiv b$ だから $\phi(a) = \phi(b)$．すると，$\phi_{\equiv}$ が全単射であるこ

とは明らか．$\phi_{\equiv}$ が準同型であることは，以下のようにわかる．

$$\begin{aligned}\phi_{\equiv}(f^{\mathfrak{A}/\equiv}([a_0],\cdots,[a_{n-1}])) &= \phi_{\equiv}([f^{\mathfrak{A}}(a_0,\cdots,a_{n-1})]) && \text{(剰余代数の定義)}\\ &= \phi(f^{\mathfrak{A}}(a_0,\cdots,a_{n-1})) && (\phi_{\equiv}\text{ の定義})\\ &= f^{\mathfrak{B}}(\phi(a_0),\cdots,\phi(a_{n-1})) && (\phi\text{ は準同型})\\ &= f^{\mathfrak{B}}(\phi_{\equiv}([a_0]),\cdots,\phi_{\equiv}([a_{n-1}])) && (\phi_{\equiv}\text{ の定義}).\end{aligned}$$

□

次の系は，準同型定理と殆ど同様に証明できる．$\phi:\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ が全射でない場合に使えるので応用範囲が広い．

系 1.2.10 準同型 $\phi:\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ と $\mathfrak{A}$ 上の合同関係 $\equiv$ が与えられて，

$$a\equiv b \Rightarrow \phi(a)=\phi(b)$$

が成り立っているとする．このとき，準同型 $\phi_{\equiv}:\mathfrak{A}/\equiv\to\mathfrak{B}$ が存在し，$\phi=\phi_{\equiv}\circ\pi_{\equiv}$ となる．

1.3 自由代数と Birkhoff の完全性定理

本節では，Birkhoff の完全性定理と等式クラス定理を証明する．ここでも，代数言語 $\mathcal{L}$ を 1 つ固定し，特に明記しない限り，この言語における代数構造だけを考える．

定義 1.3.1 代数 $\mathfrak{B}$ が代数 $\mathfrak{A}$ の**部分代数**(subalgebra)であるとは，$|\mathfrak{B}|\subseteq|\mathfrak{A}|$ で，すべての関数記号 f と，任意の $b_0,\cdots,b_{n-1}\in|\mathfrak{B}|$ に対して，

$$f^{\mathfrak{A}}(b_0,\cdots,b_{n-1})=f^{\mathfrak{B}}(b_0,\cdots,b_{n-1})$$

が成り立つことである．このとき，$\mathfrak{B}\subseteq\mathfrak{A}$ と書く．

定義 1.3.2 $\mathfrak{A}$ を代数，$X\subseteq|\mathfrak{A}|$ とする．$\mathfrak{B}$ が X を含む $\mathfrak{A}$ の最小の部分代数であるとき，$\mathfrak{B}$ は($\mathfrak{A}$ において) X で**生成される**(generated by X)であるという．

定義 1.3.3　$\mathcal{K}$ を $\mathcal{L}$-代数のある集まり(クラス)とする．$\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ が $X \subseteq |\mathfrak{A}|$ によって生成される**自由 $\mathcal{K}$-代数**(free $\mathcal{K}$-algebra)であるとは，以下の2条件が成り立つことをいう．

（1）　$\mathfrak{A}$ は($\mathfrak{A}$ において) X で生成される．

（2）　任意の $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$ について，どんな写像 $\phi : X \to |\mathfrak{B}|$ も準同型 $\phi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ に一意に拡張できる．(図2)

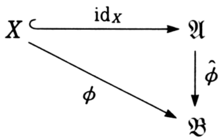


図　2

例 6　$\mathcal{K}$ を，実数 $\mathfrak{R}$ 上のベクトル空間を集めた任意のクラスとする．このとき，$\mathcal{K}$ に属するどのベクトル空間もその基底によって生成される自由 $\mathcal{K}$-代数である．

補題 1.3.4　$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ がそれぞれ X, Y によって生成される自由 $\mathcal{K}$-代数で，X, Y の濃度が等しければ，$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ である．

証明　X, Y の濃度が等しければ，全単射 $\phi : X \to Y$ がとれる．$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ は自由 $\mathcal{K}$-代数だから，ϕ, ϕ^{-1} はそれぞれ準同型 $\widehat{\phi} : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, $\widehat{\phi^{-1}} : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ に一意に拡張できる．すると，$\widehat{\phi^{-1}}\widehat{\phi}$ は id_X の拡張となる $\mathfrak{A}$ から $\mathfrak{A}$ への準同型であり，拡張の一意性から，

$$\widehat{\phi^{-1}}\widehat{\phi} = \mathrm{id}_{|A|}$$

を得る．同様に，$\widehat{\phi}\widehat{\phi^{-1}} = \mathrm{id}_{|B|}$ であり，よって $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ である．(問題5参照)　□

ベクトル空間の場合には，上の定理の逆(つまり，2つの同型のベクトル空間の基底の濃度は等しいこと)もいえるが，一般の自由代数ではそれは成立しない．次の問題を見よ．

問題 7　言語 $\mathcal{L}=\{g_1, g_2, h\}$ とし，等式集合 E を次のように定める．

$$E=\{\,h(g_1(x), g_2(x))=x,\ g_1(h(x,y))=x,\ g_2(h(x,y))=y\}.$$

いま，E のモデル全体を $\mathcal{K}=\mathrm{Mod}(E)$ とおくと，有限生成の自由 $\mathcal{K}$-代数はすべて同型であることを示せ．

いまから自由代数の具体的な構成法を示す．まず，X を変数の集合とする．$\mathrm{Term}(X)$ を，X の変数と $\mathcal{L}$ の記号で作られる項全体とする．このとき，$\mathrm{Term}(X)$ を領域にもち，次のように自然に定義される関数を備えた $\mathcal{L}$-代数 $\mathcal{T}(X)=(\mathrm{Term}(X), f_0{}^{\mathcal{T}(X)}, f_1{}^{\mathcal{T}(X)}, \cdots)$ を**項代数**(term algebra)という．すなわち，$\mathcal{L}$ の各関数記号 f に対し，

$$f^{\mathcal{T}(X)}(t_0, \cdots, t_{n-1})=f(t_0, \cdots, t_{n-1}).$$

ここで，右辺 $f(t_0, \cdots, t_{n-1})$ は，記号列としての項である．

補題 1.3.5　$\mathcal{L}$-代数のクラス $\mathcal{K}$ が $\mathcal{T}(X)$ を含むとき，$\mathcal{T}(X)$ は X によって生成される自由 $\mathcal{K}$-代数である．

証明　$\mathcal{T}(X)$ が X によって生成される $\mathcal{L}$-代数であることは容易にわかる．いま，任意の $\mathfrak{B}\in\mathcal{K}$ と，任意の射 $\phi: X\to|\mathfrak{B}|$ をとる．$\hat{\phi}: \mathcal{T}(X)\to\mathfrak{B}$ を次のように帰納的に定義する．

（1）　$x\in X$ に対しては，$\hat{\phi}(x)=\phi(x)$ とする．

（2）　$\hat{\phi}(f(t_0, \cdots, t_{n-1}))=f^{\mathfrak{B}}(\hat{\phi}(t_0), \cdots, \hat{\phi}(t_{n-1}))$.

すると，$\hat{\phi}$ が ϕ を拡張する準同型になることは明らか．また，準同型であれば必ず上の式を満たすことになるので，拡張の一意性も容易にわかる．□

代数 $\mathfrak{A}$ と項 $s, t\in\mathrm{Term}(X)$ について，任意の準同型 $\phi: \mathcal{T}(X)\to\mathfrak{A}$ が $\phi(s)=\phi(t)$ を満たすときに，

$$\mathfrak{A}\models s=t$$

と書く．ここで，準同型 $\phi: \mathcal{T}(X)\to\mathfrak{A}$ は，各変数 x に $|\mathfrak{A}|$ の要素 $\phi(x)$ を代入して項 s の値 $\phi(s)$ を求める関数と考えられる．よって，$\mathfrak{A}\models s=t$

は2つの項 s, t が $\mathfrak{A}$ 上で常に同じ値をもつことを表している．

いま，E を $\mathrm{Term}(X)$ の項からなる等式の集合とする．任意の $\alpha \in E$ に対し $\mathfrak{A} \models \alpha$ が成り立つことを

$$\mathfrak{A} \models E$$

で表す．さらに，

$$\mathrm{Mod}(E) = \{\mathfrak{A} : \mathfrak{A}\ \text{は}\ \mathcal{L}\text{-代数で，}\ \mathfrak{A} \models E\},$$

$$E \models \alpha \Leftrightarrow \text{すべての}\ \mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}(E)\ \text{について}\ \mathfrak{A} \models \alpha$$

とする．

1.1節で，等式を扱う形式体系を定義した．そのときはまだ一般の代数言語を定義していなかったが，そこで与えた演繹体系は，ここでもそのまま使うことができる．そして，等式公理 E から $s = t$ を形式的に導出できるとき，

$$E \vdash s = t$$

と書く．我々がこれから証明したいことは，次の関係である．

$$E \models s = t \Leftrightarrow E \vdash s = t.$$

まず，$\Leftarrow$ は容易にわかる．$E \vdash s = t$ と仮定し，E の任意のモデル $\mathfrak{M}$ をとる．E の証明木の一番上にある等式は，E の公理か $t = t$ であるから，当然 $\mathfrak{M}$ で成り立つ．また，各規則の前提(上式)が $\mathfrak{M}$ で成り立てば，結論(下式)もまた成り立つことは明らかなので，結局 E の証明木に含まれるすべての等式が $\mathfrak{M}$ で成り立つことがわかる．特に，最下式 $s = t$ は $\mathfrak{M}$ で成り立っている．

$\Rightarrow$ については，1.1節の最後にも書いたように，自由代数を使った構成が必要になる．以下でそれを示す．

定義 1.3.6 $\mathrm{Term}(X)$ 式の関係 $\equiv_E$ を

$$s \equiv_E t \Leftrightarrow E \vdash s = t$$

で定める．

補題 1.3.7 $\equiv_E$ は，以下を満たす．

(1) $\equiv_E$ は合同関係である．

(2) 任意の $\phi: \mathcal{T}(X) \to \mathcal{T}(X)$ について，

$$s \equiv_E t \Rightarrow \phi(s) \equiv_E \phi(t).$$

(3) 任意の $\phi: \mathcal{T}(X) \to \mathcal{T}(X)/{\equiv_E}$ について，$\psi: \mathcal{T}(X) \to \mathcal{T}(X)$ が存在して，

$$\phi = \pi_{\equiv_E} \circ \psi.$$

証明 (1) と (2) は等式理論の定義から直ちにいえる．特に，(2) は代入規則 (sub) に対応する．

(3) を示すには，各 $x \in X$ に対し，$\phi(x) = [t_x]$ となる元 t_x を選んで，ψ を $x \mapsto t_x$ の拡張となる準同型とすればよい． □

上の補題の 3 条件を満たす関係 $\equiv_E$ は，$\mathcal{T}$ 上の**不変的合同関係** (invariant congruence relation) と呼ばれる．(注．$s \equiv_E t \Leftrightarrow E \models s = t$ で $\equiv_E$ を定義しても，不変的合同関係になり，次の補題も成立する．)

補題 1.3.8 $\mathcal{T}(X)/{\equiv_E}$ は $X/{\equiv_E}$ で生成される自由 Mod(E)-代数になる．

証明 最初に $\mathcal{T}(X)/{\equiv_E} \in \mathrm{Mod}(E)$ をいうため，$s = t$ を E の等式とする．任意の準同型 $\phi: \mathcal{T}(X) \to \mathcal{T}(X)/{\equiv_E}$ が $\phi(s) = \phi(t)$ を満たすことをいえばよい．まず，補題1.3.7の (3) より，$\phi = \pi_{\equiv_E} \circ \psi$ となる $\psi: \mathcal{T}(X) \to \mathcal{T}(X)$ がとれる．$s \equiv_E t$ だから，同補題の (2) より $\psi(s) \equiv_E \psi(t)$．すると，$\pi_{\equiv_E}$ の定義と $\phi = \pi_{\equiv_E} \circ \psi$ より，$\phi(s) = \phi(t)$ が成り立つ．

また，$\mathcal{T}(X)/{\equiv_E}$ の任意の部分代数に対して $\pi_{\equiv}$ の逆像として得られる $\mathcal{T}(X)$ の部分代数があるので，$\mathcal{T}(X)/{\equiv_E}$ が $X/{\equiv_E}$ で生成されることは $\mathcal{T}(X)$ が X で生成されることから明らかである．

最後に，$\mathcal{T}(X)/{\equiv_E}$ の自由性を示すために，任意の $\mathfrak{A} \models E$ と任意の

$\phi : X/\equiv_E \to |\mathfrak{A}|$ をとる．いま，$\psi = \phi \circ \pi_{\equiv_E}$ とおくと，$\mathcal{T}(X)$ の自由性により $\psi : X \to |\mathfrak{A}|$ は準同型 $\widehat{\psi} : \mathcal{T}(X) \to \mathfrak{A}$ に拡張できる．$s \equiv_E t$ ならば，$\mathfrak{A} \models E$ より $\mathfrak{A} \models s = t$，すなわち $\widehat{\psi}(s) = \widehat{\psi}(t)$ となる．したがって，準同型定理の系1.2.10より，$\widehat{\phi} : \mathcal{T}(X)/\equiv_E \to \mathfrak{A}$ が存在し，$\widehat{\psi} = \widehat{\phi} \circ \pi_{\equiv_E}$ と書ける．明らかに $\widehat{\phi}$ は ϕ の拡張となる準同型である．そして，$\widehat{\psi}$ の一意性から $\widehat{\phi}$ も一意に定まる． □

これで，次の定理の証明の準備が整った．

定理 1.3.9 (**Birkhoff の完全性定理**(completeness theorem))

$$E \models \alpha \Leftrightarrow E \vdash \alpha.$$

証明 $\Leftarrow$ はすでに示した．$\Rightarrow$ を示すため，$E \models s = t$ とする．前補題より $\mathcal{T}(X)/\equiv_E \in \mathrm{Mod}(E)$ だから，$\mathcal{T}(X)/\equiv_E \models s = t$．すると，任意の準同型 $\phi : \mathcal{T}(X) \to \mathcal{T}(X)/\equiv_E$ に対し $\phi(s) = \phi(t)$ だから，特に $\phi = \pi_{\equiv_E}$ として $s \equiv_E t$，すなわち $E \vdash s = t$． □

定義 1.3.10 $\mathcal{L}$-代数の集まり $\mathcal{K}$ が等式の集まり E で特徴付けられるとき，つまり

$$\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(E)$$

と表されるとき，$\mathcal{K}$ を**等式クラス**(equational class)もしくは**多様体**(variety)と呼ぶ．

定理 1.3.11 (**Birkhoff の等式クラス定理**(variety theorem)) $\mathcal{K}$ が等式クラスである $\Leftrightarrow$ $\mathcal{K}$ が部分代数，準同型像，直積で閉じている．

注．“準同型像で閉じている”とは，$\mathcal{K}$ に属する任意の代数 $\mathfrak{A}$ と任意の準同型 $\phi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ ($\mathfrak{B}$ は $\mathcal{K}$ に属するとは限らない)に対して，ϕ の値域となる $\mathfrak{B}$ の部分代数が $\mathcal{K}$ に属することである．“直積で閉じている”とは，$\mathcal{K}$ に属する任意個の代数 $\mathfrak{A}_i$ の直積(4.2節で一般的な定義を与える)が再び $\mathcal{K}$ に属することである．

証明 ⇒は容易である．ある代数構造で成り立つ等式が，その部分代数や準同型像で成り立つことは明らかである．また，各 $\mathfrak{A}_i$ で成り立つ等式は直積 $\prod \mathfrak{A}_i$ でも成り立つので，等式クラス $\mathcal{K}$ は直積でも閉じている．

⇐を示すために，$\mathcal{K}$ は部分代数，準同型像，直積で閉じているとする．変数の無限集合 X を適当に定め，$\mathrm{Term}(X)$ に属する項についての等式の集合を，以下のように定義する．

$$E = \{s = t : \forall \mathfrak{A} \in \mathcal{K} \quad \mathfrak{A} \models s = t\}.$$

我々の目的は，$\mathrm{Mod}(E) = \mathcal{K}$ を示すことである．$\mathrm{Mod}(E) \supseteq \mathcal{K}$ は明らかなので，$\mathrm{Mod}(E) \subseteq \mathcal{K}$ を示せばよい．

任意の $\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}(E)$ に対して，それを準同型像とするような準同型およびその定義域となる $\mathcal{K}$ の代数 $\mathfrak{C}$ が構成できれば，それから $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ がいえる．まず，定義域の代数 $\mathfrak{C}$ の構成法を示そう．

とりあえず，変数の集合 Y を任意に固定しておく．いま，$\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$ と，準同型 $\phi : \mathcal{T}(Y) \to \mathfrak{B}$ に対して，$\mathcal{T}(Y)$ 上の合同関係 $\approx_\phi$ を

$$s \approx_\phi t \Leftrightarrow \phi(s) = \phi(t)$$

で定める．準同型定理により，

$$\phi(\mathcal{T}(Y)) \simeq \mathcal{T}(Y)/\approx_\phi$$

で，左辺は $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$ の部分代数だから，仮定より $\mathcal{T}(Y)/\approx_\phi \in \mathcal{K}$ である．

ある準同型 ϕ によって $\approx_\phi$ と表せる $\mathcal{T}(Y)$ の合同関係全体を $\mathcal{C}$ とおく．（$\mathcal{C}$ の濃度は，$\mathcal{T}(Y)$ のベキ集合の濃度以下である．） 各 $\approx \in \mathcal{C}$ について $\mathcal{T}(Y)/\approx \in \mathcal{K}$ だから，仮定よりそれらの直積も $\mathcal{K}$ に属する．すなわち，

$$\prod_{\approx \in \mathcal{C}} (\mathcal{T}(Y)/\approx) \in \mathcal{K}$$

となる．各 $\approx \in \mathcal{C}$ についての準同型 $\pi_\approx : \mathcal{T}(Y) \to \mathcal{T}(Y)/\approx$ を結合させれば，準同型

$$\phi : \mathcal{T}(Y) \to \prod_{\approx \in \mathcal{C}} (\mathcal{T}(Y)/\approx)$$

が自然に定義できる．このとき，先と同様に $\mathcal{T}(Y)/\approx_\phi \in \mathcal{K}$ がいえる．

これが，求める定義域の代数 $\mathfrak{C}$ の候補になる．

ここで，次のことが成り立つことに注目しておく．

$$
\begin{aligned}
s \approx_\phi t &\Leftrightarrow \phi(s) = \phi(t) \\
&\Leftrightarrow \text{各} \approx \in \mathcal{C} \text{ について } s \approx t \\
&\Leftrightarrow \text{各} \mathfrak{B} \in \mathcal{K} \text{ と各準同型 } \phi : \mathcal{T}(Y) \to \mathfrak{B} \text{ について } \phi(s) = \phi(t) \\
&\Leftrightarrow \text{各} \mathfrak{B} \in \mathcal{K} \text{ について } \mathfrak{B} \models s = t.
\end{aligned}
$$

s, t は $\mathcal{T}(Y)$ の項であるから，最後の式から $s = t$ がそのまま E に属するとはいえないが，s, t に含まれるすべての変数を X の変数で置き換えれば，E に属する等式が得られる．

さて，任意の $\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}(E)$ を選ぶ．そして，いま変数の集合 Y を $|\mathfrak{A}|$ より濃度が大きなものとすれば，全射

$$\phi : Y \to |\mathfrak{A}|$$

がある．これは全射のまま準同型

$$\hat{\phi} : \mathcal{T}(Y) \to \mathfrak{A}$$

に拡張できる．ここで，$\mathcal{T}(Y)$ の項 s, t で，$s \approx_\phi t$ が成り立つものを選ぶ．変数の適当な置き換えによって，$s = t$ は E に属する等式になる．$\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}(E)$ であるから，$\mathfrak{A}$ は変数を置き換えた $s = t$ を満たし，したがって $\mathfrak{A} \models s = t$ も成り立つので，$\hat{\phi}(s) = \hat{\phi}(t)$ がいえる．以上のもとで，準同型定理の系 1.2.10 を用いると，全射準同型

$$\hat{\phi}_{\approx_\phi} : \mathcal{T}(Y)/\approx_\phi \to \mathfrak{A}$$

が得られる．すでに見たように $\mathcal{T}(Y)/\approx_\phi \in \mathcal{K}$ で，$\mathcal{K}$ は準同型像で閉じているから，$\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ となる． □

補足 1 1.1 節で与えた群の公理系 Gp は等号だけからなるので，群全体は等式クラスをなすと考えられる．しかし，これとは異なる方法で群を特徴付けることもできる．例えば，群を，集合とその上の 2 項演算の組 $(G, \cdot)$ で，

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z),$$
$$\exists y\, \forall x\, (y \cdot x = x \wedge (\exists z (x \cdot z = y)))$$

を満たすものとする．この定義による群は，等式クラスにはならない．実際，($\mathbf{N}$, $+$)は式 ($\mathbb{Z}$, $+$) の部分代数であるが群ではない．

アーベル群，環，R-加群，束，ブール代数などは十分な記号を用いると等式クラスになるが，いくら記号を加えても等式だけでは公理化できないものに整域(0以外の零因子をもたない可換環)や体がある．

問題 8 体は，等式だけで公理化できないことを示せ．

補足 2 等式理論の簡単な拡張を考える．新しい言語は，関数記号の他に関係記号 $R_1, R_2, \cdots$ を含むものとする．$s = t$ または $R(t_1, \cdots, t_n)$ の形の式を原子式と呼び，ここでは原子式だけを扱う形式全体を与える．

定義 1.3.12 原子式の集合 T を公理とする形式体系(これも T で表す)は，次の公理と規則からなる．

（1） T に属する原子式および $t = t$ の形の等式は公理である．

（2） 以下の5つの図式は規則である．但し，s, t, s_i, t_i, u は項，x は変数，f は関数記号，R は関係記号である．

$$\frac{s=t}{t=s}, \qquad \frac{s=t \quad t=u}{s=u},$$

$$\frac{s(x)=t(x)}{s(u)=t(u)}, \qquad \frac{s_1=t_1 \ \cdots \ s_n=t_n}{f(s_1,\cdots,s_n)=f(t_1,\cdots,t_n)},$$

$$\frac{s_1=t_1 \ \cdots \ s_n=t_n \quad R(s_1,\cdots,s_n)}{R(t_1,\cdots,t_n)}.$$

この形式体系 T における証明木は，等式理論の場合と同様に定義され，原子式 α が証明木をもつことを $T \vdash \alpha$ で表す．他方，関係記号に対する解釈を伴う構造を考えることによって，T のモデルや $T \models \alpha$ の概念も自然に導入できる．この拡張された理論においても，Birkhoff の完全性定理や等式クラス定理と同様の主張が成り立つ．

1.4 ブール代数と可換環

19世紀半ばにBooleは，思考の論理的結合を記号的に扱うために，今日ブール代数と呼ばれるものを考案した．現代ではブール代数はより一般的な“束”の概念に包括されて扱われることが多いが，それらは等式理論の代表例である．

集合 X 上の2項関係 $\leq$ が，反射律($x \leq x$)，反対称律($x \leq y$ かつ $y \leq x$ ならば $x = y$)，そして推移律($x \leq y$ かつ $y \leq z$ ならば $x \leq z$)を満たすときに，$\leq$ を**順序**(order)もしくは**半順序**(partial order)という．それらに加えて，比較可能律 ($x \leq y$ または $y \leq x$) を満たすときに，$\leq$ を**全順序**(total order)もしくは**線形順序**(linear order)という．

集合 $X \neq \emptyset$ が半順序 $\leq$ をもつとする．任意の $x, y \in X$ に対して $\sup\{x, y\}$ と $\inf\{x, y\}$ が X の中に存在すると仮定し，それらをそれぞれ $x + y$ と $x \cdot y$ で表す．(注．$\sup A$ は，A の最小上界(上限)，すなわち A のどの元よりも上にあるもののうち最小なもの．$\inf A$ は，A の最大下界(下限)．) このとき以下が明らかに成り立つ．

$$
\begin{aligned}
x + x &= x, & x \cdot x &= x, \\
x + y &= y + x, & x \cdot y &= y \cdot x, \\
x + (y + z) &= (x + y) + z, & x \cdot (y \cdot z) &= (x \cdot y) \cdot z, \\
(x + y) \cdot x &= x, & (x \cdot y) + x &= x.
\end{aligned}
$$

上の8つの等式を**束**(lattice)の公理といい，それらを満たす代数構造 (L, $+$, $\cdot$) を**束**と呼ぶ．逆に，束 (L, $+$, $\cdot$) に対して，

$$x \leq y \Leftrightarrow x \cdot y = x$$

によって2項関係 $x \leq y$ を定義すると，これが L 上の半順序になることもわかる．このとき，束の演算 $+$, $\cdot$ は，この半順序に関してのsupとinfに一致する．

例7 $\mathfrak{G}$ を任意の群として，$\mathcal{K}$ を $\mathfrak{G}$ の部分群全体とする．$\mathcal{K}$ の上には部分群の関

係によって半順序が与えられ，それについて $\sup\{x, y\}$ と $\inf\{x, y\}$ の存在がいえ，束になる．この場合，$\mathcal{K}$ の任意の部分集合 A に対しても $\sup A$ と $\inf A$ が存在しており，このようなとき $\mathcal{K}$ は**完備束**(complete lattice)であるという．

次の等式を**分配律**(distributive law)という．

$$(x+y)\cdot z = (x\cdot z)+(y\cdot z), \qquad (x\cdot y)+z = (x+z)\cdot(y+z).$$

分配律を満たす束を**分配束**(distributive lattice)と呼ぶ．

定義 1.4.1　ブール代数(Boolean algebra)の理論 BA は，言語 $\mathcal{L}_{\mathrm{R}} = (+, \cdot, -, 0, 1)$ における以下の公理よりなる．

(1)　分配束の公理．

(2)　$x+0=x, \quad x+(-x)=1, \quad x\cdot 1 = x, \quad x\cdot(-x)=0.$

理論 BA のモデルを単に**ブール代数**と呼ぶ．

定理 1.4.2 (相対定理)　$\mathcal{L}_{\mathrm{R}} = (+, \cdot, -, 0, 1)$ における等式 φ に対し，$+$ と $\cdot$ を置き換え，0 と 1 を置き換えた等式(相対式)を $\tilde{\varphi}$ で表すと，

$$\mathrm{BA} \vdash \varphi \Leftrightarrow \mathrm{BA} \vdash \tilde{\varphi}.$$

証明　BA の各公理 σ に対する相対式 $\tilde{\sigma}$ も公理である．したがって，BA における定理 φ の証明に対して，そこに現れるすべての式を相対式に置き換えると，$\tilde{\varphi}$ の証明が得られる．□

例 8　X を任意の集合とし，$\mathcal{P}(X)$ を X のベキ集合(部分集合全体)とする．いま，$Y \subseteq X$ に対して $Y^c = X - Y$ とすれば，**ベキ集合代数** $\mathfrak{P}(X) = (\mathcal{P}(X), \cup, \cap, {}^c, \emptyset, X)$ はブール代数である．

逆に，次のこともいえる．(証明は，4.4 節で与える．)

定理 1.4.3 (Stone の表現定理(representation theorem)**)**　任意のブール代数 $\mathfrak{B}$ に対し，ある集合 X が存在し，$\mathfrak{B}$ はそのベキ集合代数 $\mathfrak{P}(X)$ に埋め込める．(つまり，$\mathfrak{B}$ は $\mathfrak{P}(X)$ の部分代数と同型になる．)

定義 1.4.4　可換環(commutative ring)の理論 CR は，言語 $\mathcal{L}_{\mathrm{R}}=(+,\cdot,-,0,1)$ における以下の公理よりなる．

$$x+0=x,\quad x+y=y+x,\quad x+(y+z)=(x+y)+z,$$

$$x+(-x)=0,$$

$$x\cdot 0=0,\quad x\cdot 1=x,\quad x\cdot y=y\cdot x,\quad x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z,$$

$$x\cdot(y+z)=(x\cdot y)+(x\cdot z).$$

理論 CR のモデルを単に**可換環**と呼ぶ．

ブール代数でも，可換環でも，普通は $0\neq 1$ を公理に入れるが，ここでは等式理論として扱っているので，これを除く．$0=1$ となる構造は，特殊ケースとして扱えばよい．

例 9　整数の構造 $\mathfrak{Z}=(\mathbb{Z},+,\cdot,-,0,1)$ は，可換環である．

例 10　可換環 $\mathfrak{A}$ に対して，$\mathfrak{A}$ の元を係数とし，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ を変数(不定元)とする多項式全体 $A[X_1, X_2, \cdots, X_n]$ は，多項式同士の自然な演算のもとで可換環 $\mathfrak{A}[X_1, X_2, \cdots, X_n]$ になる．

定義 1.4.5　ブール環(Boolean ring)の理論 BR は，理論 CR に次の公理を加えたものである．

$$x^2=x.$$

但し，$x^2=x\cdot x$．理論 BR のモデルを単に**ブール環**と呼ぶ．

まず，ブール環において，$x+x=0$ が成り立つことを見ておこう．

$$x+x=(x+x)^2=x^2+x^2+x^2+x^2=x+x+x+x.$$

両辺から $x+x$ を引けば，$x+x=0$．ブール環の $+$ は，ブール代数の $+$ とはかなり性質が異なることがわかる．しかし，両者は以下の意味で互いに翻訳可能である．

定理 1.4.6 (Stone)　(1)　ブール代数 $\mathfrak{B}=(B,+,\cdot,-,0,1)$ に対し，

$$x \oplus y = (x \cdot (-y)) + ((-x) \cdot y), \qquad \ominus x = x$$

と定めると，$\mathfrak{B}^\circ = (B, \oplus, \cdot, \ominus, 0, 1)$ はブール環である．

（2）　ブール環 $\mathfrak{R} = (R, +, \cdot, -, 0, 1)$ に対し，

$$x \oplus y = x + y + x \cdot y, \qquad \ominus x = 1 + x$$

と定めると，$\mathfrak{R}^\circ = (R, \oplus, \cdot, \ominus, 0, 1)$ はブール代数である．

（3）　(1), (2) の定義の下で，任意のブール代数 $\mathfrak{B}$，ブール環 $\mathfrak{R}$ に対して，$\mathfrak{B}^{\circ\circ} = \mathfrak{B}$，$\mathfrak{R}^{\circ\circ} = \mathfrak{R}$ となる．

証明は簡単な計算でできる．必要ならば，文献 [BaN] などを参照されたい．

2

計算の理論

20 世紀の初め，記号列の機械的操作に対し，強い関心を抱いたのは Hilbert であったが，それを数学的に定式化したのは Gödel, Turing, Post らである．特に，Turing が考案した計算モデルであるテューリング機械は，その後の電子計算機の誕生にも大きな影響を与え，現在でも実際の計算機に一番近い理論模型として様々な計算の解析に用いられている．

本章では，まず記憶装置(書き込みテープ)をもたないテューリング機械であるオートマトンを導入し，その基本的な性質を概観した後，一般のテューリング機械を定義する．そして，テューリング機械によって計算可能な関数や集合の特徴を調べ，また計算可能でない集合や決定できない問題について考える．

2.1 オートマトンとモノイド

本節では，簡単な計算機模型であるオートマトンを定義し，それが受理する言語の性質を調べる．

$\Omega(\neq \emptyset)$を記号の有限集合とする．その要素を有限個並べたもの $a_1\cdots a_n$ を Ω 上の**語**(word)という．技術的な理由から，長さ $n=0$ の語を認め，**空な語**(empty word)ε と呼ぶ．語全体を Ω^* とおき，その上の 2 項演算 $v\cdot w$ をそれらの**連接**(concatenation)(つまり，2 つの語 $v=a_1\cdots a_n$，$w=b_1\cdots b_n$ に対し，$a_1\cdots a_n b_1\cdots b_n$ を値とする関数)とすれば，$(\Omega^*, \cdot, \varepsilon)$ は Ω で生成される自由モノイドである．(注．モノイドの公理は，$e\cdot x=x\cdot e=x$ および $(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$．)

Ω^* の部分集合を，(Ω 上の)**言語**(language)と呼ぶ．どんな数学理論においても，項全体，式全体，定理全体などは，この意味での言語である．(注．前章の“代数言語”との違いに注意せよ．) 我々は，任意に与えた記号列が，正しい項であるか否か，定理であるか否かなどを判定する方法に興味がある．本節では，要素か否かの判定がオートマトンという単純な機械仕掛けでできる言語(正則言語)について考える．項や定理の認識にはもう少し高度の仕組みが必要になるので，それらについては次節以降で述べよう．

定義 2.1.1 **(決定性有限)オートマトン**((deterministic finite) automaton)は，次のような 5 つの組 $\mathcal{M}=(Q,\Omega,\delta,q_0,F)$ である．

1) Q は空でない有限集合である．Q の要素を**状態**(state)と呼ぶ．
2) Ω も空でない有限集合である．Ω の要素を**記号**(symbol)と呼ぶ．
3) $\delta: Q\times\Omega\to Q$ を**遷移関数**(transition function)と呼ぶ．
4) $q_0\in Q$ を**初期状態**(initial state)と呼ぶ．
5) $F\subseteq Q$ は**終了状態**(final states)の集合である．

オートマトンは，入力テープと有限の制御部からなる簡単な機械と見なせる．この機械は入力テープに書かれた記号列を左から 1 文字ずつ読み込み，その記号に応じて逐次自分自身の状態を変化させる．遷移関数 δ は，状態 s で記号 a を入力したときに，次の状態が $\delta(s, a)$ となることを定めている．遷移関数 δ を拡張して，語の入力に対する遷移関数 $\bar{\delta}: Q \times \Omega^* \to Q$ を以下のように帰納的に定める．

$$\begin{cases} \bar{\delta}(q, \varepsilon) = q, \\ \bar{\delta}(q, aw) = \bar{\delta}(\delta(q, a), w) \quad (a \in \Omega,\ w \in \Omega^*). \end{cases}$$

特に，$\bar{\delta}(q_0, w)$ は，初期状態 q_0 で入力語 w を読み始め，読み終わったときの状態を表す．この状態 $\bar{\delta}(q_0, w)$ が終了状態（F に属する）のとき，オートマトン $\mathcal{M}$ は w を**受理する**(accept)という．

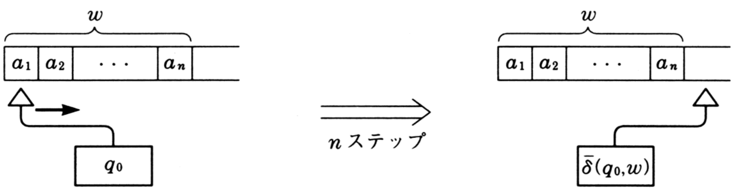


図 1 オートマトンと遷移関数

$L(\mathcal{M}) = \{ w \in \Omega^* : \bar{\delta}(q_0, w) \in F \}$ を $\mathcal{M}$ **によって受理される**言語(language accepted by $\mathcal{M}$)という．そして，ある $\mathcal{M}$ によって受理される言語を**正則言語**(regular language)と呼ぶ．

例 1 オートマトン $\mathcal{M} = (Q, \Omega, \delta, q_0, F)$ の各構成要素を以下のように定める．$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, $\Omega = \{0, 1\}$, $F = \{q_0\}$ とおく．遷移関数 δ は次の表で与える．

δ	0	1
q_0	q_0	q_1
q_1	q_2	q_0
q_2	q_1	q_2

このとき，

$$L(\mathcal{M}) = \{\varepsilon, 0, 00, \cdots, 11, 1001, 10101, \cdots\}$$
$$= \{x \in \Omega^* : x\text{は}3\text{の倍数の}2\text{進表現}\}$$

となる．オートマトンの仕組みは，次のように図示するとわかりやすい．

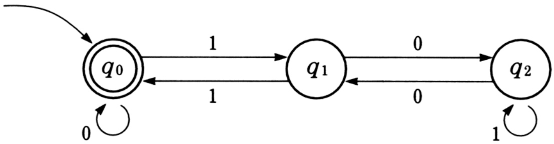


図 2

ここで，左上の矢印は初期状態の位置を示し，二重丸は最終状態を表している．

例 2　$L = \{a^n b^n : n \geq 1\}$ が正則言語ではないことを示す．仮に $\mathcal{M} = (Q, \Omega, \cdots)$ が L を受理したとしよう．$n > |Q|$ ($= Q$ の濃度) のとき，$\mathcal{M}$ が a^n を読む間に，ある状態 q が 2 回(以上)現れなくてはならない(鳩の巣原理)．それが i ステップ目と $i+j$ ステップ目 ($j > 0$) だとすれば，この 2 つのステップの間は完全に読み飛ばしてもその後に変化はないから，a^n を読み終えた状態は，a^{n-j} を読み終えた状態に等しいことがわかる．したがって，$\mathcal{M}$ が $a^n b^n$ を受理するならば，$a^{n-j} b^n$ も受理するはずであり，よって L を受理しない．

次の補題はかなり自明ではあるが，基本的な事柄なので証明しておこう．

補題 2.1.2　Ω 上の正則言語は，Ω 上のオートマトンで受理される．

証明　Ω 上の正則言語 L を受理するオートマトンを $\mathcal{M} = (Q, \Omega', \delta, q_0, F)$ とする．これに対して，Ω 上のオートマトン $\mathcal{M}' = (Q', \Omega, \delta', q_0, F)$ を次のように定義する．Q に新しい状態 q^* を加えて $Q' = Q \cup \{q^*\}$ とする．$\delta' : Q' \times \Omega \to Q'$ を以下のように定める．まず $q \in Q$ かつ $a \in \Omega \cap \Omega'$ のとき，$\delta'(q, a) = \delta(q, a)$ とする．$q = q^*$ または $a \in \Omega - \Omega'$ のとき，$\delta'(q, a) = q^*$ とする．このオートマトン $\mathcal{M}'$ は，$\mathcal{M}$ から $\Omega' - \Omega$ の記号を操作する部分を削除したものである．$\mathcal{M}$ は $\Omega' - \Omega$ の記号を含む列を受理し

ないので，$L(\mathcal{M}') = L(\mathcal{M})$ となることは明らかである． □

正則言語の定義の仕方はたくさんあるが，次の補題で与える同値条件は数学的に最も簡潔なものである．

定理 2.1.3 $L \subseteq \Omega^*$ が正則であることは，有限モノイド M とモノイド準同型 $\phi : \Omega^* \to M$ が存在して，$L = \phi^{-1}\phi(L)$ が成り立つことと同値である．

証明 まず，オートマトン $\mathcal{M} = (Q, \Omega, \delta, q_0, F)$ が L を受理するとしよう．各 $w \in \Omega^*$ に対して，関数 $f_w : Q \to Q$ を $f_w(q) = \bar{\delta}(q, w^t)$ によって定義する．但し，w^t は，w の鏡像(左右反対に並べたもの)である．すると，有限集合 $M = \{f_w : w \in \Omega^*\}$ は，関数合成を演算としたモノイドになる．ここで $f_u \circ f_v = f_{uv}$ となることに注意すれば，$\phi(w) = f_w$ が Ω^* から M へのモノイド準同型であることは容易にわかる．また，$f_w = f_{w'}$ かつ $w \in L$ ならば $w' \in L$ だから，$L = \phi^{-1}\phi(L)$ が成り立つことは明らかである．

逆に，有限モノイド M とモノイド準同型 $\phi : \Omega^* \to M$ が与えられ，$L = \phi^{-1}\phi(L)$ が成り立つとしよう．このとき，オートマトン $\mathcal{M} = (Q, \Omega, \delta, q_0, F)$ を次のように構成する．$Q = M$，$\delta(q, a) = q \circ \phi(a)$，$q_0$ は M の単位元，そして $F = \phi(L)$．すると，$\bar{\delta}(q_0, w) = \phi(w)$ となる．したがって，

$$\bar{\delta}(q_0, w) \in F = \phi(L) \Leftrightarrow w \in \phi^{-1}\phi(L) = L.$$

すなわち，$\mathcal{M}$ は L を受理する． □

次の定理は，上の定理の系としても簡単に導けるが，ここでは直接的証明を与えておく．

定理 2.1.4 Ω 上の正則言語は集合演算 $\cap, \cup, {}^c$ について閉じている．

証明 補集合演算 ^{c} について．$\mathcal{M} = (Q, \Omega, \delta, q_0, F)$ に対して，$\overline{\mathcal{M}} =$

$(Q, \Omega, \delta, q_0, Q-F)$ とおけば $L(\overline{\mathcal{M}}) = \Omega^* - L(\mathcal{M}) = (L(\mathcal{M}))^c$.

和集合演算 $\cup$ について. $\mathcal{M}_i = (Q_i, \Omega, \delta_i, q_0^i, F_i)$ $(i = 1, 2)$ に対し, $\mathcal{M} = (Q_1 \times Q_2, \Omega, \delta, (q_0^1, q_0^2), F)$, 但し $\delta((q^1, q^2), a) = (\delta_1(q^1, a), \delta_2(q^2, a))$, $F = (F_1 \times Q_2) \cup (Q_1 \times F_2)$ とおくと, $L(\mathcal{M}) = L(\mathcal{M}_1) \cup L(\mathcal{M}_2)$ となる. $\cap$ も同様に示せる. □

次に, (決定性)オートマトンの機能を拡張して, 非決定性オートマトンを導入する. あとで示すようにこの拡張によって受理集合のクラスは変わらないが, いろいろな正則言語が容易に表現できるようになる.

定義 2.1.5 非決定性(有限)オートマトン(nondeterministic (finite) automaton)は, 次のような5つ組 $\mathcal{M} = (Q, \Omega, \delta, Q_0, F)$ である.

1) Q, Ω, F は決定性の場合と同様である.
2) $Q_0 \subseteq Q$ は初期状態の集合である.
3) $\delta : Q \times \Omega \to \mathcal{P}(Q)$.

非決定性オートマトンでは, ある状態 q で記号 a を入力したとき, 次に移る状態がただ1つに定まらず, 移りうる状態の集合が $\delta(q, a)$ で与えられている. 決定性の遷移関数と同様に, この関数 δ も, 語の入力に対する関数 $\overline{\delta} : Q \times \Omega^* \to Q$ に拡張される.

$$\begin{cases} \overline{\delta}(q, \varepsilon) = \{q\}, \\ \overline{\delta}(q, aw) = \bigcup_{p \in \delta(q,a)} \overline{\delta}(p, w). \end{cases}$$

さらに $\overline{\delta}(A, w) = \bigcup_{q \in A} \overline{\delta}(q, w)$ とおく.

非決定性オートマトン $\mathcal{M}$ が語 w を**受理する**というのは, $\overline{\delta}(Q_0, w) \cap F \neq \emptyset$, つまりある初期状態から出発してある終了状態に到達する方法があることをいう. $\mathcal{M}$ **によって受理される**言語 $L(\mathcal{M})$ は次のようになる.

$$L(\mathcal{M}) = \{ w \in \Omega^* : \overline{\delta}(Q_0, w) \cap F \neq \emptyset \}.$$

定理 2.1.6 非決定性オートマトン $\mathcal{M}$ に対する $L(\mathcal{M})$ は正則言語である．すなわち $L(\mathcal{M})$ を受理するオートマトンが存在する．

証明 非決定性オートマトン $\mathcal{M}=(Q,\Omega,\delta,Q_0,F)$ に対し，オートマトン $\mathcal{M}'=(Q',\Omega,\delta',q_0',F')$ を以下のように定義する．

$$Q'=\mathcal{P}(Q) \qquad (Q\text{ のベキ集合}),$$
$$\delta'(Q,a)=\bigcup_{q\in Q}\delta(q,a),$$
$$q_0'=Q_0,$$
$$F'=\{A\in Q' : A\cap F\neq\emptyset\}$$

すると $\bar{\delta}'(q_0',w)=\bar{\delta}(Q_0,w)$ が簡単にいえるので，$L(\mathcal{M}')=L(\mathcal{M})$ も容易にわかる． □

定理 2.1.7 正則言語に関して，以下が成り立つ．

（1） $\emptyset$ は正則言語である．

（2） 任意の $a\in\Omega$ に対し $\{a\}$ は正則言語である．

（3） A,B が正則言語ならば $A\cup B$ も正則言語である．

（4） A,B が正則言語ならば $A\cdot B=\{v\cdot w : v\in A, w\in B\}$ も正則言語である．

（5） A が正則言語ならば $A^*=\{w_1w_2\cdots w_n : w_i\in A\}$ も正則言語である．

証明 (1), (2) は明らか．(3) は定理 2.1.4 で示されている．(4) を示すには，正則言語 A,B に対し，$A\cdot B$ を受理する非決定性オートマトンを作ればよい．A,B を受理するオートマトンをそれぞれ $\mathcal{M},\mathcal{N}$ とする．$\mathcal{M}$ の終了状態に入る矢印を，$\mathcal{N}$ の初期状態に入る矢印に分岐させて，2 つのオートマトンを結合すれば，$A\cdot B$ を受理する非決定性オートマトンが得られる (図 3)．その詳細は読者に委ねる．(5) を示すには，A を受理するオートマトン $\mathcal{M}$ に対して，終了状態に入る矢印を初期状態にも分岐させる非決定性オートマトンを作ればよい (図 4)．やはり詳細は読者に任せる． □

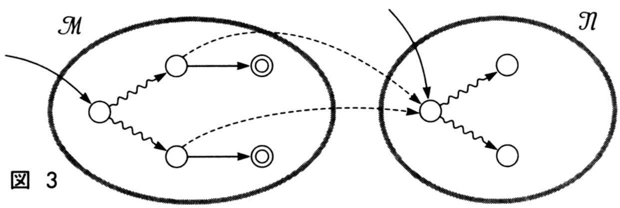


図 3

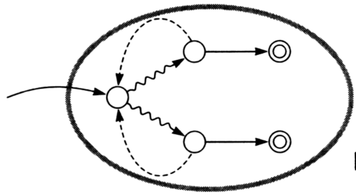


図 4

上の定理によれば，各 $a \in \Omega$ に対する $\{a\}$ から，$\cup, \cdot, {}^*$ を用いて定義される言語は正則言語になる．$\{a\}$ を単に a と書き，・を省略し，$\cup$ を $+$ で置き換えてできたものは，**正則表現**(regular expression)(または，**正規表現**)として，計算機関係で言語を定義する際に広く用いられている．例えば，$\{a\}\cdot(\{a\} \cup \{b\})^*$ は $a(a+b)^*$ と書かれる．

最後に，定理 2.1.7 の逆，つまり正則言語が必ず正則表現をもつという美しい定理を証明しよう．

定理 2.1.8 (Kleene)　定理 2.1.7 の 5 条件を満たす最小のクラスは正則言語のクラスである．

証明　任意のオートマトン $\mathscr{M} = (Q, \Omega, \delta, q_0, F)$ に対し，その受理言語 L が正則表現をもつことをいえばよい．いま，$Q = \{q_0, q_1, \cdots, q_n\}$ として，オートマトン $\mathscr{M}_{i,j} = (Q, \Omega, \delta, q_i, \{q_j\})$ で受理される言語を $L_{i,j}$ とおく．さらに，$\mathscr{M}_{i,j}$ が計算途中で(最初と最後を除いて) $\{q_0, q_1, \cdots, q_k\}$ 以外の状態を通らずに受理する語全体を $L^k_{i,j}$ とおく．便宜的に，$L^{-1}_{i,j} = \{a : \delta(q_i, a) = q_j\}$ としよう．

まず，任意の i, j に対して $L^k_{i,j}$ が正則表現をもつことを，k についての帰納法で示す．$L^{-1}_{i,j}$ は記号の有限集合であるから，正則表現をもつ．一般の $k \geq 0$ に対しては，

$$L^k_{i,j} = L^{k-1}_{i,j} + L^{k-1}_{i,k}(L^{k-1}_{k,k})^* L^{k-1}_{k,j}$$

となり，やはり $L^k_{i,j}$ も正則表現をもつ．最後に，受理言語 $L = \bigcup_{j \in F} L^n_{0,j}$ であるから，L も正則表現をもつ． □

問題 1 $L = \{ w \in \Omega^* : w$ は 01 と 011 を適当に並べたもの$\}$ (すなわち，$(01 + 011)^*$) を受理する(なるべく状態数の少ない)非決定性オートマトンを作り，定理 2.1.6 の証明にしたがってこれを決定性オートマトンに直せ．

問題 2 語 w に対し，その鏡像（左右逆に並べたもの）を w^t で表す．L が正則であるとき，$L^t = \{ w^t : w \in L\}$ も正則になることを示せ．

2.2 テューリング機械

テューリング機械とは，記憶装置をもったオートマトンである．しかし，歴史的にはテューリング機械の方がオートマトンより先で，Turing は Cantor や Gödel の研究の流れで，計算可能な実数と不可能な実数の境界を明確にするためにテューリング機械を考案した．

テューリング機械にはいろいろなバリエーションがあるが，まずなるべく簡単なもので定義し，それから機能拡張したものを考えよう．テューリング機械も，オートマトンと同様に有限制御部と 1 本のテープでできているが，そのテープは入力専用ではなく，データを書き込んだり消したりもできる．もう少し詳しく見ていくと，テューリング機械に付随する記憶装置は，1 本の両方向無限テープと読み書き用のヘッドで構成される．テープはます目に区切られ，各ます目には高々 1 つ記号が書き込まれる．ヘッドは，それが置かれたます目の記号を読み，そこに別の記号(空白を含む)を上書きすること

ができる．そして，ヘッドは左右に1ますずつ移動する．無限テープとはいえ，実際に使われるのは有限個のます目であり，それ以外の部分は初めから用意しておかなくてもよいのだが，議論の簡単化のため予め無限長のテープが与えられ，未使用部分には空白記号 B が書き込まれているとする．

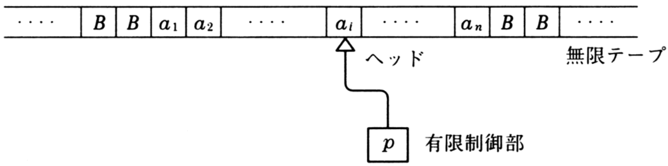


図 5　テューリング機械

形式的な定義は以下のようである．

定義 2.2.1　(**決定性**)**テューリング機械**((deterministic) Turing machine, Tm と略す)は，次のような5つ組 $\mathcal{M}=(Q,\Omega,\delta,q_0,F)$ である．

1)　Q は空でない有限集合である．Q の要素を**状態**(state)と呼ぶ．

2)　Ω は**記号**(symbol)の有限集合である．特に，空白記号 B を含む．

3)　$\delta: Q\times\Omega\to\Omega\times\{R,L,N\}\times Q$ を**遷移関数**(transition function)と呼ぶ．

4)　$q_0\in Q$ を**初期状態**(initial state)と呼ぶ．

5)　$F\subseteq Q$ は**終了状態**(final states)の集合である．

オートマトンとの違いは，遷移関数 δ だけである．ここで $\delta(p,a)=(b,x,q)$ が意味することは次の通りである．状態 p でヘッドが記号 a を読み込んだとき，その記号を b に書き換え，$x=R,L,N$ によりそれぞれヘッドを右に1つ，左に1つ，0個(neutral)動かし，そして次の状態を q とする．

テューリング機械が図5のような状態にあるとき，その**計算状況**(configuration, instantaneous description)を $a_1\cdots a_{i-1}pa_i\cdots a_n$ で表す．

これは次の情報を含んでいる.

1) テープ上に $a_1 \cdots a_n$ と書かれ(空白記号 B を含んでよい), それ以外はすべて空白である.

2) ヘッドは a_i の位置にある.

3) 状態は p である.

計算状況を用いて, テューリング機械の動作を定義しよう. 状況 α と次の状況 α' の関係 $\alpha \rhd \alpha'$ を, 以下のように定める.

1) $\delta(p, a_i) = (a_i', L, q)$ のとき,

$$a_1 \cdots a_{i-1} p a_i \cdots a_n \rhd a_1 \cdots a_{i-2} q a_{i-1} a_i' a_{i+1} \cdots a_n \quad (i > 1),$$
$$p a_1 a_2 \cdots a_n \rhd q B a_1' a_2 \cdots a_n \quad (i = 1).$$

2) $\delta(p, a_i) = (a_i', N, q)$ のとき,

$$a_1 \cdots a_{i-1} p a_i \cdots a_n \rhd a_1 \cdots a_{i-1} q a_i' a_{i+1} \cdots a_n.$$

3) $\delta(p, a_i) = (a_i', R, q)$ のとき,

$$a_1 \cdots a_{i-1} p a_i \cdots a_n \rhd a_1 \cdots a_{i-1} a_i' q a_{i+1} \cdots a_n \quad (i \leq n),$$
$$a_1 \cdots a_{n-1} a_n p \rhd a_1 \cdots a_{n-1} a_n a_{n+1}' q \quad (i = n+1,\ a_{n+1} = B).$$

計算状況の列 $\alpha_0 \rhd \alpha_1 \rhd \cdots \rhd \alpha_n$ が存在するとき, $\alpha_0 \rhd^* \alpha_n$ と書く$(n \geq 0)$. そして, ある記号列 $b_1 \cdots b_m$ と $q \in F$ に対して, $q_0 a_1 \cdots a_n \rhd^* b_1 \cdots b_i q\, b_{i+1} \cdots b_m$ となるとき, すなわち初期状態 q_0 に入力列 $a_1 \cdots a_n$ (空白記号を含まない)を与えて終了状態 $q \in F$ に至る計算過程があるとき, $\mathcal{M}$ は $a_1 \cdots a_n$ を**受理する**(accept)という. $\mathcal{M}$ が受理する語全体の集合を $\mathcal{M}$ **によって受理される**言語(language accepted by $\mathcal{M}$) といい, $L(\mathcal{M})$ で表す. ある $\mathcal{M}$ によって受理される言語を **0 型言語**(type 0 language)と呼ぶ. テューリング機械はオートマトンの拡張であるから, 正則言語は 0 型言語である. 他方, 正則言語でない 0 型言語がある.

例 3 $L = \{a^n b^n : n \geq 1\}$ は 0 型言語である. L を受理する Tm を以下に示す.

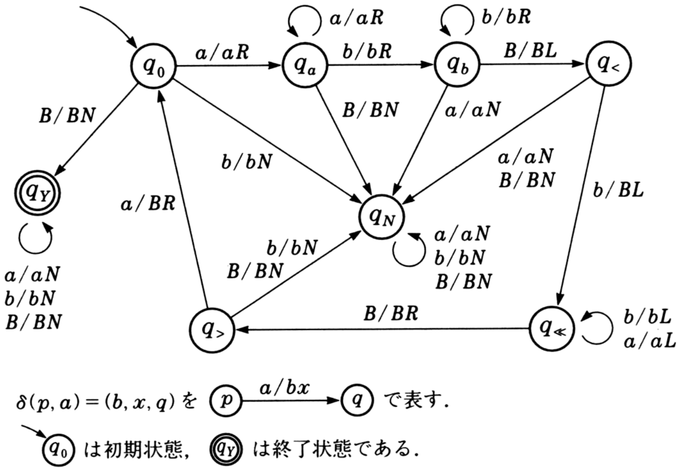


図 6

0 型言語のクラスも正則言語のクラスと同様，集合演算 $A \cup B$ と $A \cap B$，そして連接 $A \cdot B$ や反復 A^* に関して閉じている．重要な相違点は，0 型言語が補集合演算 A^c で閉じていないことである．これらの事実については，テューリング機械の機能を拡張してから，改めて考えることにしよう．

まず，複数本のテープとそれぞれに対応するヘッドをもつテューリング機械を考えよう．この機械の動作は次のようなものである．すべてのヘッドが同時にそれぞれのテープの記号を読み込み，それら入力の組と内部状態によって次の動作が決定する．そして，各ヘッドはそれぞれ別々な記号を書き入れ，また別々に左右高々 1 ます移動して，内部状態を更新する．

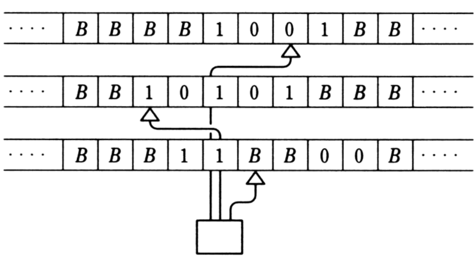


図 7

定義 2.2.2 k **テープ**(k-tape)または**多テープ**(multitape)**テューリング機械**とは，5つ組 $\mathcal{M}=(Q,\Omega,\delta,q_0,F)$ であり，ここで遷移関数は $\delta: Q\times\Omega^k\to\Omega^k\times\{R,L,N\}^k\times Q$ である．

多テープ Tm の初期状態において，入力は第1テープにあり，それ以外のテープはすべて空白とする．多テープ Tm $\mathcal{M}$ の受理言語 $L(\mathcal{M})$ の定義は，単テープの場合と同じなので省略する．

定理 2.2.3 多テープテューリング機械で受理される言語は，テューリング機械でも受理できる．

証明 言語 L が，k テープ Tm $\mathcal{M}=(Q,\Omega,\delta,q_0,F)$ で受理されるとする．これを模倣する単テープ Tm $\mathcal{M}'$ を次のように定義する．$\mathcal{M}'$ のテープは $2k$ 本のトラックをもち，2本のトラックで $\mathcal{M}$ のテープ1本の内容とヘッドの位置を記録する．正確には，$\mathcal{M}'$ の記号集合は $\Omega'=(\Omega\times\{0,B\})^k$ であり，その空白記号は B^{2k} と同一視する．図7の $\mathcal{M}$ に対する $\mathcal{M}'$ は，以下のようである．

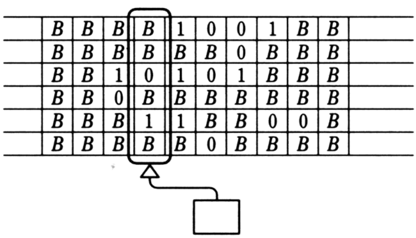


図 8

$\mathcal{M}$ の1動作を模倣するために，$\mathcal{M}'$ は，まず $\mathcal{M}$ の各ヘッドの位置を探し，そこに置かれた入力記号の情報を集め，$\mathcal{M}$ の次動作を知る．それにしたがって，各トラックの内容を書き直し，内部状態も改める．もし，$\mathcal{M}$ が最終状態に入ったときは，$\mathcal{M}'$ も最終状態に入るものとする．$\mathcal{M}'$ の受理言語が L と一致することは，構成から明らかであろう． □

系 2.2.4 0型言語のクラスは，集合演算 $A \cup B$，$A \cap B$ に関して閉じている．

証明 $\cup$ について．0型言語 A, B を受理するテューリング機械をそれぞれ $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ とする．$A \cup B$ を受理するには，2テープテューリング機械 $\mathcal{N}$ を次のように作ればよい．$\mathcal{N}$ は，まず第1テープに置かれる入力列を第2テープにもコピーし，その後第1テープ上で $\mathcal{M}$ の動作を，第2テープ上で $\mathcal{M}'$ の動作を並列して実行する．そして，$\mathcal{M}$ と $\mathcal{M}'$ のどちらかの模倣動作が終了状態に入れば，$\mathcal{N}$ も終了状態に入るとする．$\cap$ も同様に示せる． □

次に，非決定性テューリング機械を導入する．簡単のため，単テープのものだけを考える．

定義 2.2.5 **非決定性**(nondeterministic)**テューリング機械**は，次のような5つ組 $\mathcal{M} = (Q, \Omega, \delta, Q_0, F)$ である．

1) Q, Ω, F は決定性の場合と同様である．
2) $Q_0 \subseteq Q$ は初期状態の集合である．
3) $\delta : Q \times \Omega \to \mathcal{P}(\Omega \times \{R, L, N\} \times Q)$．

非決定性 Tm では，ある状態 q で記号 a を読んだとき，次の動作がただ1つに定まらず，可能な動作の集合が $\delta(q, a)$ で与えられる．可能な動作から1つを選んで計算を続け，終了状態に至る計算過程が1つでもあるなら，非決定性 Tm はその入力を受理するという．非決定性 Tm $\mathcal{M}$ が受理する語全体も $L(\mathcal{M})$ で表す．

定理 2.2.6 非決定性テューリング機械 $\mathcal{M}$ の受理言語 $L(\mathcal{M})$ は，0型言語である．

証明 $\mathcal{M}$ を非決定性 Tm とする．その計算において，各時点で起こりうる分岐の最大数，つまり遷移関数 δ の値となる集合の最大濃度を l とする．

すると，各計算過程は，各時点でどの枝を選ぶかで決まるので，l 個の記号 $x_1, \cdots, x_l$ の有限列で一意的に表示される．(このような記号列のすべてが，対応する計算過程をもつわけではない．)

さて，これから構成する決定性 Tm $\mathcal{M}'$ は，3 本のテープをもっている．第 1 テープは，入力専用で，何度も読み返しはするが何も書き込まないものとする．第 2 テープには，記号 $x_1, \cdots, x_l$ の有限列を書く．$\{x_1, \cdots, x_l\}^*$ の記号列は $l+1$ 進数によってある自然数を表すと考え，その順番で順次記号列が第 2 テープに書かれるものとする．第 3 テープは，第 2 テープに書かれた有限列で表される $\mathcal{M}$ の計算過程を実行するための作業場所である．

まず，$\mathcal{M}'$ は第 1 テープの入力列を第 3 テープにコピーする．第 2 テープに最初の記号列を入れ，これに沿って第 3 テープ上で $\mathcal{M}$ を模倣する．第 2 テープの記号列にしたがう動作が途中で不可能になれば次の作業にスキップする．もしこの計算途中で $\mathcal{M}$ が終了状態になったときは，$\mathcal{M}'$ も終了状態にする．次の作業では，再び第 1 テープの入力列を第 3 テープにコピーし直し第 2 テープの記号列を次の記号列に書き換えて，同様の操作を続ける．これをどこまでも繰り返していくが，$\mathcal{M}'$ の動作は常に決定的に行われている．$\mathcal{M}'$ が $\mathcal{M}$ と同じ言語を受理することは構成から明らかであろう． □

上の証明の $\mathcal{M}'$ の構成において，第 2 テープの記号列をその前後の動作と無関係に発生させるのは無駄に思えるが，1 つの可能な道をどこまでも探索し続けるとそれで無限の時間がかかってしまい，他に終了状態に至る道があっても発見できないことになるので，このような試行錯誤的な操作は(多少の改善の余地はあるにしても)本質的には避けられない．

系 2.2.7 0 型言語のクラスは，連接 $A \cdot B$ や反復 A^* に関して閉じている．

証明 上の定理 2.2.6 により，正則言語の場合(定理 2.1.7)と同様に証明できる． □

これまで定義したテューリング機械とそのバリエーションは，入力した記号列を受理するか否かを判定するだけで，出力をもっていなかった．しかし，終了状態に達した時点でテープ(複数あれば第1テープ)に書かれている記号列(空白記号を除く)を出力と考えれば，自然に記号列から記号列への(部分)関数が定まる．これを(**出力付き**)**テューリング機械によって定義される**関数(function defined by a Tm (with output))と呼ぶ．

この関数について，いくつかの注意点を述べておく．まず，定義域は Ω^* 全体にならなくてもよい．ある入力列に対して，Tmが永久に終了状態に到達しないとき，その列に対する関数の値は未定義である．また，我々のTmの定義では，終了状態に入ったあと機械が停止するという約束はないが，関数の値が高々1つに決まるように，最初に終了状態に入ったときのテープ状態を出力とする．それから，非決定性Tmによる出力は，それを定理2.2.6の証明のように決定性に変換して得られる出力とする．多テープや非決定性のテューリング機械によって定義される関数が，単テープ決定性のテューリング機械によっても定義されることは，定理2.2.3や2.2.6の証明から明らかである．さらに次のこともいえる．

定理 2.2.8 #を記号集合 Ω に属さない記号とする．このとき $f: A \to \Omega^*$ $(A \subseteq \Omega^*)$ が出力付きテューリング機械 $\mathcal{M}$ で定義されることと $\{u\#f(u): u \in A\}$ が0型言語であることとは同値である．

証明 $\Rightarrow$ を示す．部分関数 $f: \Omega^* \to \Omega^*$ を定義する出力付きテューリング機械を $\mathcal{M}$ とする．これに対し，2テープのテューリング機械 $\mathcal{M}'$ を次のようなものと定義する．まず，第1テープに与えられた入力が $u\#v$ の形であることを確かめる．そうであれば，u を第2テープにコピーし，そこで $\mathcal{M}$ を模倣する．$\mathcal{M}$ が終了状態に入ったら，そのときの第2テープの内容を第1テープの内容の後半 v と比較し，一致すれば $\mathcal{M}'$ は終了状態に入る．

$\Leftarrow$ を示す．$\{u\#f(u): u \in A\}$ を受理するテューリング機械を $\mathcal{M}'$ とす

る．これに対し，出力付きの非決定性テューリング機械 $\mathcal{M}$ を考える．$\mathcal{M}$ は2本のテープをもつとし，まず第2テープに任意の文字列 $v \in \Omega^*$ を書き込む．そして，第1テープの入力文字 u の後に，# を挟んで，第2テープの文字列 v をコピーし，第1テープ上で $\mathcal{M}'$ を模倣する．それが終了状態になれば，第1テープを空白にして，再び第2テープの内容をコピーし，$\mathcal{M}$ は終了状態に入る．第2テープに任意の文字列を書き込む最初の作業だけが非決定的に行われるが，これは $f(u)$ の可能な値をすべて調べ上げるのと同等な操作である． □

2.3 計算可能な関数と原始再帰的関数

$\mathbf{N}$ を自然数全体の集合とするとき，$f: \mathbf{N}^k \to \mathbf{N}$ は**数論的関数**と呼ばれる．そして，テューリング機械で実現できるような数論的関数を計算可能な関数という．

定義 2.3.1 $f: \mathbf{N}^k \to \mathbf{N}$ が**計算可能**(computable)であることは，$1^{m_1}01^{m_2}0\cdots01^{m_k}$ を入力すると $1^{f(m_1,\cdots,m_k)}$ を出力するテューリング機械があること，あるいは $\{1^{m_1}0\cdots01^{m_k}01^{f(m_1,\cdots,m_k)} : m_1,\cdots,m_k \in \mathbf{N}\}$ が0型言語になることである．(注．1^m は“1”を m 個並べた記号列を表す．)

例 4 足し算 $+: \mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}$ は計算可能である．これを実現するテューリング機械の動作は簡単である．仕切記号0を1と置き換えて，文字列の右端の1を消去すればよい．

例 5 掛け算 $\cdot: \mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}$ は計算可能である．この計算には，3本のテープを用意する．まず，1^m01^n が第1テープに入力されているとする．前処理として，1^m を第2テープに，1^n を第3テープにコピーし，第1テープを空列 1^0 にしておく．以下，次のことを繰り返す．第3テープが空列($n=0$)であれば，終了状態に入る．第3テープが空列でなければ，その記号列の右端の記号1を1つ消去して，第

1テープの記号列の後ろに第2テープの内容 1^m をコピーする．つまり，第3テープをカウンターとして用い，そこに最初に書かれた1の個数 n の回数だけ第2テープの内容 1^m が第1テープにコピーされる．したがって，最終状態では第1テープに 1^{mn} が書かれることになる．

ところで，自然数の掛け算 xy は，足し算を繰り返して用いることにより，次のように再帰的に定義される．

$$\begin{cases} x0 = 0, \\ x(y+1) = xy + x. \end{cases}$$

掛け算の場合と同様にして，再帰的に定義される関数一般について次のことがいえる．

補題 2.3.2 $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，$h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ が計算可能ならば，

$$\begin{cases} f(x, 0) = g(x), \\ f(x, y+1) = h(x, f(x, y)) \end{cases}$$

で定義される f も計算可能である．

証明 3テープチューリング機械を構成する．まず，1^x01^y が第1テープに入力されているとする．前処理として，1^x を第2テープに，1^y を第3テープにコピーし，第1テープを 1^x にしておく．まず，$g(x)$ の計算を第1テープ上で行う．それから，次のことを繰り返す．第3テープが空列であれば，終了状態に入る．そうでなければ，その記号列の右端の記号1を1つ消去してから，第1テープの文字列の左側に第2テープの内容 1^x および区切り記号0を書き込んで，h の計算を行う．このチューリング機械は，第1テープ上で $f(x, 0) = g(x)$，$f(x, 1) = h(x, g(x))$，…，$f(x, y) = h(x, f(x, y-1))$ を順に計算し，$1^{f(x,y)}$ で終了する． □

普通の数学で扱う数論的関数は，大概ごく簡単な基本関数から上のような再帰法だけで定義される．そうやって定義される関数たちは原始再帰的関数

と呼ばれ，計算可能な関数の一種になるが，メタ数学の形式化や Hilbert の有限の立場と関連して，極めて重要な関数族を形成する．原始再帰的関数の正確な定義を与える．

定義 2.3.3 **原始再帰的関数**(primitive recursive function)は以下のように定義される．

1) 定数 0，**後者関数**(successor function) $\mathrm{S}(x) = x + 1$，**射影関数**(projection) $\mathrm{P}^n_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_i$ $(1 \le i \le n)$ は原始再帰的関数である．

2) **関数合成**(composition)．$g_i : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, $h : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ $(1 \le i \le m)$ が原始再帰的関数のとき，

$$f(x_1, \cdots, x_n) = h(g_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, g_m(x_1, \cdots, x_n))$$

で定義される関数 $f = h(g_1, \cdots, g_m) : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ は原始再帰的関数である．

3) **原始再帰法**(primitive recursion)．$g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, $h : \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$ が原始再帰的関数のとき，

$$f(x_1, \cdots, x_n, 0) = g(x_1, \cdots, x_n)$$
$$f(x_1, \cdots, x_n, y+1) = h(x_1, \cdots, x_n, y, f(x_1, \cdots, x_n, y))$$

で定義される関数 $f : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ は原始再帰的関数である．

上の定義と補題 2.3.2 から次のことは明らかである．

補題 2.3.4 原始再帰的関数は，計算可能な全域関数である．

また，次のことも定義から容易にわかる(文献 [田 1] の補題 4.1)．

補題 2.3.5 $f(x_1, \cdots, x_n)$ を原始再帰的 n 変数関数とする．いま，m 個の変数のリスト $y_1, \cdots, y_m$ から n 個の変数 $y_{i_1}, \cdots, y_{i_n}$ (重複を許す)を適当な順で選び，

$$f'(y_1, \cdots, y_m) = f(y_{i_1}, \cdots, y_{i_n})$$

によって m 変数関数 f' を定義すると，f' も原始再帰的になる．

それでは，原始再帰的関数の例を見ていこう．

例6 前者関数 $\mathrm{M}(x) = x - 1$ (但し，$x = 0$ のときは $\mathrm{M}(x) = 0$ とする)．

$$\begin{cases} \mathrm{M}(0) = 0, \\ \mathrm{M}(x+1) = x = \mathrm{P}_1^2(x, \mathrm{M}(x)). \end{cases}$$

例7 足し算 $\mathrm{plus}(x, y) = x + y$.

$$\begin{cases} \mathrm{plus}(x, 0) = x, \\ \mathrm{plus}(x, y+1) = \mathrm{S}(\mathrm{plus}(x, y)). \end{cases}$$

例8 引き算 $x \dot{-} y$.

$$\begin{cases} x \dot{-} 0 = x, \\ x \dot{-} (y+1) = \mathrm{M}(x \dot{-} y). \end{cases}$$

問題3 $x^y, x!, \max\{x, y\}, \min\{x, y\}$ が原始再帰的関数であることを示せ．

問題4 $f(x_1, \cdots, x_n, y)$ が原始再帰的ならば，$F(x_1, \cdots, x_n, z) = \sum_{y<z} f(x_1, \cdots, x_n, y)$ と $G(x_1, \cdots, x_n, z) = \prod_{y<z} f(x_1, \cdots, x_n, y)$ も原始再帰的になることを示せ．

定義 2.3.6 n 項関係 $R \subset \mathbf{N}^n$ が**原始再帰的**(primitive recursive)であるとは，

$$\chi_R(x_1, \cdots, x_n) = \begin{cases} 1 & (R(x_1, \cdots, x_n) \text{ のとき}), \\ 0 & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

となる特性関数 $\chi_R : \mathbf{N}^n \to \{0, 1\}$ が原始再帰的になることである．

例9 $x < y$ は原始再帰的である．実際，

$$\chi_<(x, y) = (y \dot{-} x) \dot{-} \mathrm{M}(y \dot{-} x).$$

補題 2.3.7 原始再帰的な n 項関係 A, B に対し，

$$\neg A, \ \ A \wedge B, \ \ A \vee B$$

も原始再帰的である．

証明 $\chi_{\neg A} = 1 \dot{-} \chi_A$. $\chi_{A\wedge B} = \chi_A \cdot \chi_B$. $\chi_{A\vee B} = 1 \dot{-} \{(1 \dot{-} \chi_A)\cdot(1 \dot{-} \chi_B)\}$.

□

補題 2.3.8 2つの原始再帰的 n 変数関数 g, h と，原始再帰的 n 項関係 R が与えられたとき，

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \begin{cases} g(x_1, \cdots, x_n) & (R(x_1, \cdots, x_n) \text{ のとき}), \\ h(x_1, \cdots, x_n) & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

で定義される関数 f は原始再帰的である．

証明 $f = g\cdot\chi_R + h\cdot\chi_{\neg R}$. □

問題 5 $A(x_1, \cdots, x_n, y)$ が原始再帰的関係ならば，$\forall y < z\, A(x_1, \cdots, x_n, y)$ および $\exists y < z\, A(x_1, \cdots, x_n, y)$ も原始再帰的関係であることを示せ．

例 10 prime(x) =“x は素数である”は原始再帰的関係である．実際，

$$\text{prime}(x) \Leftrightarrow x > 1 \wedge \neg \exists y < x \exists z < x\ (y\cdot z = x).$$

補題 2.3.9 $A(x_1, \cdots, x_n, y)$ が原始再帰的関係ならば，

$$\mu y < z\, A(x_1, \cdots, x_n, y) = \min(\{\, y < z : A(x_1, \cdots, x_n, y)\,\} \cup \{z\})$$

で定義される関数 $\mu y < z\, A$ は原始再帰的関数である．

証明 $\mu y < z\, A = \sum_{w<z} \prod_{y\le w} \chi_{\neg A}$. □

例 11 割り算 $x/y = \mu z < x\ (x < y\cdot(z+1))$ は原始再帰的である．

例 12 $p(x)$ =“$x+1$ 番目の素数”とする．すなわち，$p(0) = 2$, $p(1) = 3$, $p(2) = 5, \cdots$ ．このとき，$p(x)$ は次のように定義される原始再帰的関数である．

$$p(0) = 2, \quad p(x+1) = \mu y < p(x)! + 2\ (p(x) < y \wedge \text{prime}(y)).$$

例 13 自然数の有限列 $(x_0, \cdots, x_{n-1})$ を1つの自然数

$$x = p(0)^{x_0+1}\cdot p(1)^{x_1+1}\cdot \cdots \cdot p(n-1)^{x_{n-1}+1}$$

に対応させる．n を固定すれば，この対応は $\mathbb{N}^n$ から $\mathbb{N}$ への原始再帰的関数であ

る．逆に，自然数 x に対し，それに対応する列の i 番目の要素 x_i を取り出す関数 $c(x, i)$ は，

$$x_i = c(x, i) = \mu y < x\ (\neg \exists z < x\ \ p(i)^{y+2} \cdot z = x)$$

で与えられ，列の長さ $\mathrm{leng}(x)$ は

$$\mathrm{leng}(x) = \mu i < x\ (\neg \exists z < x\ \ p(i) \cdot z = x)$$

で与えられる．さらに，自然数 x が列のコードになる条件 $\mathrm{Seq}(x)$ は

$$\mathrm{Seq}(x) \Leftrightarrow \forall i < x \forall z < x\ (p(i) \cdot z = x \to i \leq \mathrm{leng}(x))$$

と表せる．

定義 2.3.10 Ω を記号の(有限もしくは可算無限)集合とし，1対1関数 $\phi: \Omega \to \mathbf{N}$ が与えられているとする．記号列 $s = a_0 \cdots a_{n-1}$ に対し，自然数

$$\phi(s) = p(0)^{\phi(a_0)+1} \cdot p(1)^{\phi(a_1)+1} \cdot \cdots \cdot p(n-1)^{\phi(a_{n-1})+1}$$

を対応させれば，記号列全体 Ω^* に一意に自然数を割り振ることができる．このとき，$\phi(s)$ を s の**ゲーデル数**(Gödel number)といい，$\ulcorner s \urcorner$ で表す．

例 14 $\Omega = \{0, 1, +, (,)\}$ とし，$\phi(0) = 0$，$\phi(1) = 1$，$\phi(+) = 3$，$\phi($“ (”$) = 5$，$\phi($“) ”$) = 6$ とする．このとき，

$$\ulcorner (1+0)+1 \urcorner = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^4 \cdot 7^1 \cdot 11^7 \cdot 13^4 \cdot 17^2.$$

問題 6 上の例の記号集合 Ω において，「項」を次のように定める．

（1） 0, 1 は項である．

（2） s と t が項ならば，$(s+t)$ は項である．

例えば，$((1+0)+1)$ は項であるが，$(1+0)+1$ は項でない．このとき，“x がある項のゲーデル数になる” ことを表す述語 $\mathrm{Term}(x)$ は原始再帰的であることを示せ．

2.4 計算可能性と不可能性

この節では，ハードウェアである(決定性)テューリング機械をソフト的にエミュレートするためのプログラム言語 TPL を導入し，どんな TPL プログラムも，ある1つのテューリング機械(万能テューリング機械)で実行できることを示す．最後に，計算できない(再帰的でない)集合 K を導入する．

簡単のため，記合集合 $\Omega = \{0, 1, B\}$ をもつ Tm だけを扱う．

定義 2.4.1 プログラム言語 TPL は，次の**命令(文)** (instruction) をもつ．括弧内は，命令のコードと，命令に対応する Tm の動作である．

halt	(コード 0，終了状態に入る)
moveright	(コード 1，ヘッドを右に 1 ます移動)
moveleft	(コード 2，ヘッドを左に 1 ます移動)
write 0	(コード 3，テープに"0"を記入)
write 1	(コード 4，テープに"1"を記入)
write B	(コード 5，テープに"B"を記入)
goto l	(コード $6+3l$，第 l 番の命令文にとぶ)
if 0 **then goto** l	(コード $7+3l$，入力記号が 0 ならば，第 l 番の命令文にとぶ)
if 1 **then goto** l	(コード $8+3l$，入力記号が 1 ならば，第 l 番の命令文にとぶ)

これらの命令をセミコロン；で区切って並べたものを TPL の**プログラム** (program) と呼ぶ．

見やすさのため，プログラムの各命令文に文番号を付ける．以下にプログラムの例を示す．

例 15 $\{ww^t : w \in \{0,1\}^*\}$ を認識するプログラム．

```
0: if 0 then goto 3;
1: if 1 then goto 16;
2: halt;

3: write B;
4: moveright;
5: if 0 then goto 4;
6: if 1 then goto 4;
7: moveleft;
8: if 0 goto 10;
9: goto 29;
10: write B;
11: moveleft;
12: if 0 then goto 11;
13: if 1 then goto 11;
14: moveright;
15: goto 0;
16: write B;
17: moveright;
18: if 0 then goto 17;
19: if 1 then goto 17;
20: moveleft;
21: if 1 goto 23;
22: goto 29;
23: write B;
24: moveleft;
25: if 0 then goto 24;
26: if 1 then goto 24;
27: moveright;
28: goto 0;

29: goto 29
```

上の TPL プログラムは，図 9 に示したテューリング機械をプログラムに書き下したものである．なお，各状態に附された番号は，プログラムの文番号に対応する．

この例でもわかるように，テューリング機械の 1 つの動作を大体 3 行で記述することで，機械の仕組み全体を TPL プログラムで表現することができる．もちろんこのことは，プログラムの処理系を定義して，プログラムが何を表すかを決めておかないと意味のない主張である．ここでは，Tm を使ってプログラムの実行形式を与えることにする．

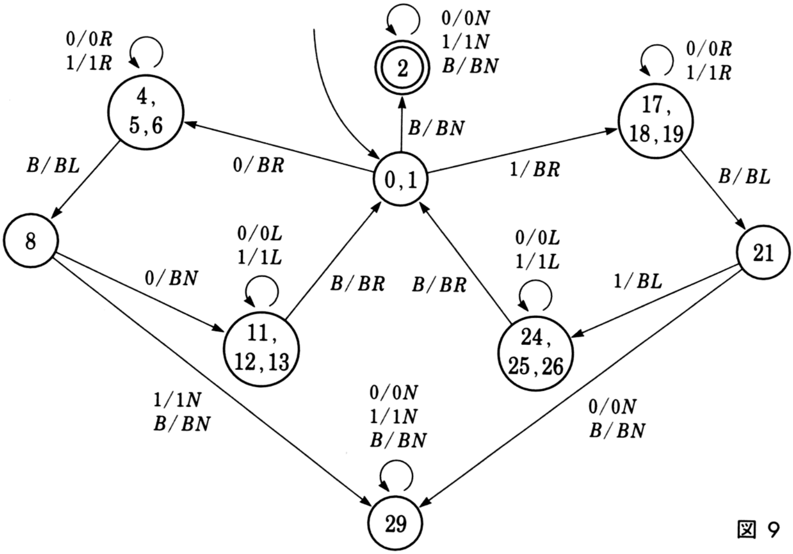


図 9

定義 2.4.2 $\mathcal{P}$ を TPL プログラムとする．これに対する(決定性)テューリング機械 $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}=(Q,\Omega,\delta,q_0,F)$ を以下のように定める．Q はプログラムを構成する命令の文番号の集合 $\{0,1,\cdots,n-1\}$ である．そして，$q_0=0$, $F=\{\text{halt 文の文番号}\}$ とおく．遷移関数 δ については，$\mathcal{P}$ に含まれる第 l 行の文の種類によって，$\delta(l,x)$ $(x=0,1,B)$ の値を次のように定める．

l: **halt** のとき，$\delta(l,x)=(l,x,N)$,

l: **moveright** のとき，$\delta(l,x)=(l+1,x,R)$,

l: **moveleft** のとき，$\delta(l,x)=(l+1,x,L)$,

l: **write** ? のとき，$\delta(l,x)=(l+1,?,N)$ 但し，$?=0,1,B$,

l: **goto** k のとき，$\delta(l,x)=(k,x,N)$,

l: **if** ? **then goto** k のとき，$\delta(l,?)=(k,?,N), \delta(l,y)=(l+1,y,N)$ $(y\neq ?)$.

TPL プログラム $\mathcal{P}$ の**受理言語**は，$\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ の受理言語であると定め，$\mathcal{P}$ が定義する部分関数 $f:\Omega^*\to\Omega^*$ は，$\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ が定義するものとする．

以上で，次の定理を述べる準備が整った．

定理 2.4.3 任意のチューリング機械 $\mathcal{M}$ に対して，TPL プログラム $\mathcal{P}$ が存在して，$\mathcal{M}$ の受理言語や定義する関数が，$\mathcal{P}$ すなわち $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ のそれらと一致するようにできる．

これまでの議論から証明の筋書きはほぼ明らかであろう．紙数の都合上，証明は読者に委ねたい．

さて，プログラム $\mathcal{P}$ は命令の列であり，各命令のコードを $c_1, c_2, \cdots, c_l$ とすれば，$\mathcal{P}$ を $\{0,1\}^*$ の記号列 $1^{c_1}0\cdots01^{c_l}$ で表すことができる．したがって，プログラムのゲーデル数「$\mathcal{P}$」は，次で与えられる．

$$p(0)^{c_1+1}\cdot p(1)^{c_2+1}\cdot\cdots\cdot p(l)^{c_l+1}.$$

定理2.4.3により，各チューリング機械 $\mathcal{M}$ には対応する TPL プログラム $\mathcal{P}$ があるので，そのゲーデル数「$\mathcal{P}$」をもって，チューリング機械の**コード**(code)もしくは**指標**(index)と呼ぶ．$\mathcal{M}$ が部分関数 $f: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ を実現しているとき，$\mathcal{M}$ の指標を e として，f を $\{e\}^n$ あるいは $\{e\}$ で表す(**Kleene のブラケット表記**(bracket notation))．e がチューリング機械の指標にならないときは，$\{e\}$ はいたるところ未定義の関数としておく．

TPL プログラムの処理はプログラム毎に Tm を構成して行われたが，ある Tm を固定して，これにプログラムを文字列として読み込んで実行することが可能である．このような Tm を**万能チューリング機械**(universal Turing machine)と呼ぶ．次の定理は，この事実を述べたものである．

定理 2.4.4 (**枚挙定理**(enumeration theorem)) 各 n について，ある自然数 e_n が存在して，すべての $d, x_1, \cdots, x_n$ について，

$$\{e_n\}^{n+1}(d, x_1, \cdots, x_n) \sim \{d\}^n(x_1, \cdots, x_n)$$

但し，$f(x_1, \cdots, x_n) \sim g(x_1, \cdots, x_n)$ は，両辺が共に定義されないか，共に定義されて同じ値をとることを意味する．

証明　定理の $\{e_n\}^{n+1}$ を実現する万能テューリング機械 $\mathcal{M}$ を以下のように構成する．この機械は，入力テープの他，作業用のテープを2本もつ．まず，第1テープの入力列を $1^d01^{x_1}0\cdots01^{x_n}$ とし，次の前準備を行う．指標部 1^d が表すプログラムを｛コード c_1 の命令；コード c_2 の命令；…；コード c_l の命令｝として，記号列 $1^{c_1}0\cdots01^{c_l}$ を第2テープに保存する．そして，第1テープの 1^d0 の部分を消す．あとは，第2テープの命令を順次実行して，第1テープの記号列を書き換えていく．第3テープは，第2テープにおいて **goto** 文もしくは **if ? then goto** 文を実行した際に，次の実行文を探し出す作業に使われる．例えば，0に挟まれた 1^{6+3l} は，**goto** l を意味するので，次の実行文は l 番目の0と $l+1$ 番目の0に挟まれた1の列で与えられるが，そこを第2テープ上で探し出すには，記号列の左端から0の個数を数えて記憶しておく場所が必要になる．**goto** 文と **if ? then goto** 文以外の命令は，第1テープの記号列に対し容易に実行でき，次の実行文に移る作業も自明である．このような計算を続け，**halt** 文が実行されたら，$\mathcal{M}$ は受理状態に入る．そのとき，第1テープに $1^{\{d\}^n(x_1,\cdots,x_n)}$ が書かれている．　□

定義 2.4.5　集合 $X \subseteq \mathbb{N}^n$ が**再帰的に枚挙可能**(recursively enumerable, r. e. と略す)であるとは，$\{1^{x_1}0\cdots01^{x_n} : (x_1,\cdots,x_n) \in X\}$ が0型言語になることをいう．

上の定義を言い換えると，$X \subseteq \mathbb{N}^n$ が r. e. であるとは，ある計算可能な部分関数の定義域になることである．それは，ある計算可能な部分関数の値域になることとも同値であり，「再帰的に枚挙可能」という名はむしろそちらの性質を表している(文献[田1]補題4.14)．

ここで，Kと呼ばれる自然数の集合を定義する．

$$\mathrm{K} = \{e : e \in \mathrm{dom}(\{e\}^1)\} = \{e : (e, e) \in \mathrm{dom}(\{e_1\}^2)\}$$

但し，e_1 は，上の定理で得られた万能Tmのコードである．この集合Kについて，次のことがいえる．

補題 2.4.6　K は r.e. 集合であるが，その補集合 $\mathbb{N}-\mathrm{K}$ は r.e. 集合ではない．

証明　まず，K が r.e. 集合になることをいうために，$\{1^e : e \in \mathrm{K}\}$ を受理する Tm を次のようにして構成する．1^e を入力したら，それを 1^e01^e に書き直す(作業用テープを用いることになる)．それ以降は，$\{e_1\}^2$ を実現する万能 Tm の動きを模倣する．この Tm が受理状態に入るのは，$(e, e) \in \mathrm{dom}(\{e_1\}^2)$ すなわち $e \in \mathrm{K}$ のときであり，そのときに限る．

次に，$\mathbb{N}-\mathrm{K}$ が r.e. 集合であるとして矛盾を導く．$\{1^e : e \notin \mathrm{K}\}$ を受理する Tm があったとして，そのコードを d とする．このとき，

$$d \in \mathrm{K} \Leftrightarrow d \in \mathrm{dom}(\{d\}^1) \Leftrightarrow d \in \{e : e \notin \mathrm{K}\} \Leftrightarrow d \notin \mathrm{K}$$

であるから，$d \in \mathrm{K}$ としても，$d \notin \mathrm{K}$ としても矛盾となる．　□

定義 2.4.7　集合 $X \subseteq \mathbb{N}^n$ が**再帰的**(recursive)または**決定可能**(decidable)であるとは，X もその補集合も r.e. になるものをいう．

したがって，K は再帰的でない r.e. 集合である．また，$X \subset \mathbb{N}^n$ が再帰的であることは，

$$\chi_R(x_1, \cdots, x_n) = \begin{cases} 1 & (R(x_1, \cdots, x_n) \text{ のとき}), \\ 0 & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

となる特性関数 $\chi_R : \mathbb{N}^n \to \{0, 1\}$ が計算可能になることと同値である．なぜなら，X とその補集合をそれぞれの定義域とする計算可能な部分関数 f と g があれば，任意の入力 $1^{x_1}0\cdots01^{x_n}$ に対して f, g の計算を平行して行い，先にどちらが停止するかで出力を 1, 0 に決めればよい．必ず一方は停止するので，この計算は全域的に定義される．

2.5 再帰理論の基礎

前節で導入した K は，それをデータベースに使えば，どんな r. e. 集合も再帰的集合のように扱えるという意味で，完全な r. e. 集合と呼ばれる．では，完全でなくかつ再帰的でない r. e. 集合は存在するか？というのが **Post の問題**(Post's problem)である．この問題はすでに肯定的に解かれているが，それを 1 つの目標として形作られ，近年では計算量理論と重なり合って発展している分野を**再帰理論**(recursion theory)と呼んでいる．

ここでは，前節で扱えなかった再帰理論の基本的な定理を扱う．残念ながら，Post の問題自体を扱う紙数はないが，本節の付録で再帰理論と深く関わる「語の問題」を取り上げる．

以下で，$f(x_1, \cdots, x_n) \sim g(x_1, \cdots, x_n)$ は，両辺が共に定義されないか，共に定義されて同じ値をとることを意味する．

定理 2.5.1 (**Kleene の標準形定理**(normal form theorem)) 原始再帰的関数 $U(y)$ と原始再帰的関係 $T_n(e, x_1, \cdots, x_n, y)$ が存在して，任意の計算可能な部分関数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ は，ある e について，

$$f(x_1, \cdots, x_n) \sim U(\mu y T_n(e, x_1, \cdots, x_n, y))$$

と表せる．ここで，$\mu y T_n(e, x_1, \cdots, x_n, y)$ は $T_n(e, x_1, \cdots, x_n, y)$ を成り立たせる最小の y の値であり，そのような y がなければ未定義になる．

証明 関係 $T_n(e, x_1, \cdots, x_n, y)$ を次のように定義する：

$T_n(e, x_1, \cdots, x_n, y) \Leftrightarrow$ “y は，万能 Tm に $(e, x_1, \cdots, x_n)$ を表す入力列を与えたときの全計算過程のコードである．”

全計算過程とは，終了状態に至るまでの計算状況の遷移 $\alpha_0 \rhd \alpha_1 \rhd \cdots \rhd \alpha_n$ をすべて記録したものである．そのような計算過程が存在するか否かはわからないが，具体的に与えられた y が終了状態に至る正しい計算過程かどうかは，各 $i < n$ について $\alpha_i \rhd \alpha_{i+1}$ が正しい遷移であることと，最初と最後の

状況をチェックすればいいだけだから，原始再帰的な判定が可能である．つまり，$T_n(e, x_1, \cdots, x_n, y)$ は原始再帰的関係である．そして，計算過程のコード y から出力情報を取り出す原始再帰的関数を $U(y)$ とすれば，$U(\mu y T_n(e, x_1, \cdots, x_n, y))$ は，コード e をもつテューリング機械に $(x_1, \cdots, x_n)$ を入力したときの出力結果に他ならない．□

系 2.5.2　原始再帰的関係 $T_n(e, x_1, \cdots, x_n, y)$ が存在し，任意の r.e. 集合 $X \subseteq \mathbb{N}^n$ に対して，ある e が存在して，

$$(x_1, \cdots, x_n) \in X \Leftrightarrow \exists y\ T_n(e, x_1, \cdots, x_n, y).$$

定理 2.5.3（**パラメタ定理**(parameter theorem)，**S-m-n 定理**(S-m-n theorem)）　原始再帰的関数 S^m_n が存在し，

$$\{e\}^{m+n}(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m) \sim \{S^m_n(e, y_1, \cdots, y_m)\}^n(x_1, \cdots, x_n).$$

証明　コード $\{e\}^{m+n}$ をもつ TPL プログラム $\mathcal{P}$ と数列 $(y_1, \cdots, y_m)$ が与えられたとする．まず，入力列 $1^{x_1}0\cdots01^{x_n}$ の後ろに $01^{y_1}0\cdots01^{y_m}$ を書き込む作業をするプログラム $\mathcal{P}'$ を作る．このプログラムのコードは，数列 $(y_1, \cdots, y_m)$ の原始再帰的関数として得られる．さらに，プログラム $\mathcal{P}'$ の後ろにプログラム $\mathcal{P}$ をつなぐことでプログラム $\mathcal{P}''$ を作るが，その際次の2つの修正を行う．$\mathcal{P}'$ の行数を $k+1$(文番号 0〜k)として，$\mathcal{P}'$ 中の **halt** 文をすべて **goto** $k+1$ に書き直し，$\mathcal{P}$ 中の **goto** l，**if** ? **then goto** l における l を $k+1+l$ に改める．プログラム $\mathcal{P}''$ のコードは，e および $(y_1, \cdots, y_m)$ の原始再帰的関数として得られることは明らかであろう．これを S^m_n として，定理の主張が得られる．□

定理 2.5.4（**再帰定理**(recursion theorem)）　$f(x_1, \cdots, x_n, y)$ を計算可能な部分関数とする．このとき，e が存在して，

$$\{e\}^n(x_1, \cdots, x_n) \sim f(x_1, \cdots, x_n, e)$$

となる．

証明　パラメタ定理により，$\{g(y)\}(x_1, \cdots, x_n) \sim \{y\}(x_1, \cdots, x_n, y)$ となる原始再帰的関数 $g(y)$ が存在する．すると，$f(x_1, \cdots, x_n, g(y))$ は計算可能な部分関数であり．指標 d をもつ．そして，$e = g(d)$ とおけばよい．実際，

$$\{g(d)\}(x_1, \cdots, x_n) \sim \{d\}(x_1, \cdots, x_n, d) \sim f(x_1, \cdots, x_n, g(d)).$$

□

定理 2.5.5　共通部分をもたない2つの r. e. 集合 $A, B \subseteq \mathbf{N}$ で，次の性質をもつものが存在する．A を含み，B との共通部分が空になるような再帰的集合 C は存在しない．（このとき，A と B とは**再帰的に分離不能**(recursively inseparable)であるという．）

証明　2つの r. e. 集合を $A = \{e : \{e\}(e) \sim 0\}$, $B = \{e : \{e\}(e) \sim 1\}$ とする．もし A と B を分離する再帰的集合 C があれば，その特性関数の指標を d として，$\{d\}(d)$ を考えよ．d は全域関数だから，$\{d\}(d) = 0$ または 1 であるが，いずれにしても矛盾がでる．　□

補足 1　次の等式を満たす関数 f は，**アッケルマン関数**(Ackermann function)と呼ばれる．

$$\begin{aligned} f(0, y) &= y + 1, \\ f(x+1, 0) &= f(x, 1), \\ f(x+1, y+1) &= f(x, f(x+1, y)). \end{aligned}$$

この関数が全域的な計算可能関数になることは定義から明らかだが，原始再帰的でないことがわかっている．実際，任意の原始再帰的関数 $g(x, y)$ に対して，ある c が存在し，

$$g(x, y) < f(c, \max\{x, y\})$$

が成り立つ(文献 [篠田] などを参照)．

付録　語の問題

ある代数言語を固定し，集合 X から生成される項代数 $\mathcal{T}(X)$ を考える．ここでは，X を変数の集合ではなく，不定元を表す定数の集合と考える．つまり，定数の集合 X によって拡張した言語において，変数を含まない項代数が $\mathcal{T}(X)$ である．そして，X 上の等式(拡張した言語における変数を含まない等式)の集合 E による合同関係で $\mathcal{T}(X)$ を割ってできる剰余代数を $\mathcal{T}(X)/E$ で表す．$\mathcal{T}(X)/E$ と同型になる代数構造は**表示** $\langle X, E\rangle$ をもつという．特に，X が有限で，そして E が有限(または0型言語)のとき，$\langle X, E\rangle$ で表示される代数構造は**有限的**(finitely)(または**再帰的**(recursively))**に表示される**(presentable)という．有限的に表示される構造の性質は，どこまで有限的に捉えられるだろうか？

1911年 M. Dehn は，有限的に表示される群について，任意に与えられた等式がそこで成り立つか否かを判定するアルゴリズムがあるかという問題を提起した．これを群に関する**語の問題**(word problem)という．因みに，彼は次のような問題も提起している．有限的に表示される群の上で，2つの語 v, w が共約か ($\exists a\ (av = wa)$) 否かを判定するアルゴリズムはあるか(共約問題)，2つの有限表示が表す群が同型か否かを判定するアルゴリズムはあるか(同型問題)．これに続いて，1914年に A. Thue が，半群(またはモノイド)に関する語の問題，いわゆる **Thue の問題**(Thue's problem)を提起した．

これらの問題は，再帰理論の発展と歩調を合わせて，次々と解決する．まず，1947年に E. Post，1949年に A. Markov が独立して，半群の語の問題を否定的に解いた(後述)．そして，1955年に P. Novikov，1959年に W. Boone が群の語の問題を否定的に解決した(文献 [Sho])，さらに，1961年 G. Higman は，群が再帰的に表示されることと有限生成群に埋め込めることが同値であることや，有限生成群が再帰的に表示されれば，有限的に表示される群に埋め込めることなどを示した．1967年 C. Clapham は，再帰的に表示される有限生成群における語の問題が決定できるなら，それを埋め込む有限的に表示される群における語の問題も決定できることを示した．他方，1980年 D. Collins は，共約問題がそのように遺伝しないことを証明している．付言しておくと，アーベル群の場合(加法で表す)には，任意の等式が $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0\ (a_i \in \mathbb{Z})$ のように表せるので，語の問題や

同型問題は容易に決定できる．

定理 2.5.6 (Post-Markov)　半群の語の問題は決定できない．すなわち，等式の有限集合が存在して，それで表示される半群において成り立つ等式(のコード)の集合は，決定可能でない．

証明　再帰的でない r.e. 集合 K に対して，$\mathfrak{M}=(Q,\Omega,\delta,q_0,F)$ を $\{1^e: e\in \mathrm{K}\}$ を受理する決定性 Tm とする．ここで，$F=\{q_f\}$，$\delta(q_f,x)=(x,N,q_f)$ (x は Ω の任意の記号)，そして q_f に入る前にテープには $1\in\Omega$ が 1 つだけ残るようにしても一般性を失わない．つまり，Tm $\mathcal{M}$ が受理する語が入力された場合，最後の計算状況は必ず q_f1 になる．

計算状況の表記 $a_1\cdots a_{i-1}pa_i\cdots a_n$ を改めて，$\$a_1\cdots a_{i-1}pa_i\cdots a_n\$$ と書くことにする．ここで，$\$$ は端を表す記号で，Ω にも Q にも属さないものとする．こう書き直すことで，計算状況の変化をヘッドが置かれたます目の近辺の状態だけで表現できるようになる．すなわち，

1)　$\delta(p,a)=(b,L,q)$ のとき，

$$cpa \rhd pcb\,(c\neq\$),$$
$$\$pa \rhd \$pBb.$$

2)　$\delta(p,a)=(b,N,q)$ のとき，

$$pa \rhd qb.$$

3)　$\delta(p,a)=(b,R,q)$ のとき，

$$pa \rhd bq,$$
$$p\$ \rhd bq\$\,(a=B).$$

上で得られる有限個の式 $w\rhd w'$ の集まりを E とすると，計算状況の遷移は，E に属する $w\rhd w'$ によって，$uwv\rhd uw'v$ で表される．そして，$\$q_0a_1\cdots a_n\$ \rhd\cdots\rhd \$q_f1\$$ となることが，$\mathcal{M}$ が $a_1\cdots a_n$ を受理することと同値である．

ここで，E に属する各 $u\rhd v$ に対して，$v\rhd u$ を E に加えても，$\$q_0a_1\cdots a_n\$$ から $\$q_f1\$$ に到達できるか否かの条件は変わらないことに注目する．なぜなら，状況遷移の遡り方に枝分かれがあっても，下りは一本道(決定性)だから，途中で違う道を遡っても必ずもとの地点に戻るわけである．したがって，E は合同関係と

考えることができる．すると，

$$(\Omega\cup\{\$\})^*/\triangleright \text{ 上で } \$a_1\cdots a_n\$=\$q_f 1\$ \text{ が成立する}$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathcal{M} \text{ が } a_1\cdots a_n \text{ を受理する．}$$

もし，$(\Omega\cup\{\$\})^*/\triangleright$ 上で等式の真偽が決定可能になれば，$\mathcal{M}$ の受理集合も決定可能であり，K が再帰的でないことに反する． □

3

述語論理

本章では，述語論理(第1階論理)についての基本的事項を学ぶ．第1章では等式だけを扱う形式体系の性質を調べたが，述語論理は種々の関係記号(例．$<$)や論理記号(例．$\wedge, \forall$)を使って表現力を増強した体系であり，普通の数学の議論は，殆どこの論理で構築されていると考えられる．特に本書ではGentzen流の演繹体系GTを導入し，これに対して完全性定理(論理的に真なる文はすべて証明可能であること)を証明する．

3.1 言語と構造

まず，述語論理における二，三の表現例を見てみよう．

例 1 第 1 章では，群論を記号集合 $\mathcal{L} = (\cdot, e, ^{-1})$ における等式理論として導入した．述語論理を用いると，$e, ^{-1}$ の記号を使わずに次のような公理で表現できる．

$$\begin{cases} (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z), \\ \exists z\, (\forall x\, (z \cdot x = x) \wedge \forall x\, \exists y\, (y \cdot x = z)). \end{cases}$$

例 2 実関数の連続性は，次のように表現される．

- $f(x)$ が $x = a$ で連続である
  $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x\ (|x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$.
- $f(x)$ が(すべての点で)連続である
  $\Longleftrightarrow \forall a \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x\ (|x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$.
- $f(x)$ が一様連続である
  $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x\ \forall y\ (|x - y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$.

注．$\forall x > 0 \cdots$ は $\forall x\ (x > 0 \rightarrow \cdots)$ の略記．$\exists x > 0 \cdots$ は $\exists x\ (x > 0 \wedge \cdots)$ の略記．

述語論理で用いる記号には，どの理論にも共通したもの(**論理記号**，**変数**，**等号**，その他に括弧やコンマなど付随的な記号)と理論固有のもの(**数学記号**)がある．論理記号には，普通 4 つの**命題結合記号**(propositional connective)($\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$)と 2 つの**量化記号**(quantifier)($\forall, \exists$)が用いられる．数学記号には，関数記号と関係記号があり，例 2 の場合，関数記号は $0, -, f$ で，関係記号は $<$ である．特に，ある理論で用いられる数学記号のリスト $\mathcal{L}$ をその理論の言語と呼ぶ．(第 2 章の“言語”との相違に注意．)

定義 3.1.1 述語論理の**言語**(language, signature, alphabet) $\mathcal{L}$ は，**関数記号** f_i と**関係記号** R_j のリストもしくは集合である：

$$\mathcal{L} = (f_0, f_1, \cdots ; R_0, R_1, \cdots).$$

f_i を m_i 変数の関数記号，R_j を n_j 項の関係記号とするとき，$\rho = (m_0, m_1, \cdots ; n_0, n_1, \cdots)$ を言語 $\mathcal{L}$ の**類型**(similarity type)という．

実際的な言語の多くは有限ないし可算無限集合であるが，ここでは非可算の場合も妨げない．

定義 3.1.2 言語 $\mathcal{L}$ における**構造**(structure)または $\mathcal{L}$-**構造** $\mathfrak{A}$ は，次のものからなる．

（1） 空でない集合 $A = |\mathfrak{A}|$．これを $\mathfrak{A}$ の**領域**(domain)または**宇宙**(universe)と呼ぶ．

（2） 各 m 変数関数記号 $f \in L$ に対して，A 上の関数 $f^{\mathfrak{A}} : A^m \to A$.

（3） 各 n 項関係記号 $R \in L$ に対して，A 上の関係 $R^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$.

この構造を $\mathfrak{A} = (A ; f_0^{\mathfrak{A}}, f_1^{\mathfrak{A}}, \cdots ; R_0^{\mathfrak{A}}, R_1^{\mathfrak{A}}, \cdots)$ と表し，誤読が生じない場合には，仕切り記号としてセミコロン ； の代わりにコンマ , を用いる．

代数言語 $\mathcal{L}$ の場合(1.2 節)と同様にして，変数記号 $x_0, x_1, x_2, \cdots$ と言語 $\mathcal{L}$ の関数記号を適当に合成した記号列を $\mathcal{L}$ の**項**(term)という．特に，0 変数関数は**定数**(constant)と呼ばれ，項の一種である．変数を含まない項については，構造における値が次の定義によって定まる．

定義 3.1.3 $\mathfrak{A}$ を $\mathcal{L}$-構造とする．変数を含まない $\mathcal{L}$ の項 t に対し，$\mathfrak{A}$ におけるその値 $t^{\mathfrak{A}}$ を項の構成に関する帰納法によって以下のように定める．

m 変数関数記号 f に対応する $\mathfrak{A}$ の関数を $f^{\mathfrak{A}}$ とし，項 $t_0, t_1, \cdots, t_{m-1}$ の値を $t_0^{\mathfrak{A}}, t_1^{\mathfrak{A}}, \cdots, t_{m-1}^{\mathfrak{A}}$ とするとき，項 $f(t_0, t_1, \cdots, t_{m-1})$ の値は $f^{\mathfrak{A}}(t_0^{\mathfrak{A}}, t_1^{\mathfrak{A}}, \cdots, t_{m-1}^{\mathfrak{A}})$ によって定まる $|\mathfrak{A}|$ の要素である．

定義 3.1.4 言語 $\mathcal{L}$ の**論理式**(formula)を次のように定義する．

（1） 次の 2 つの形の記号列を(原子)論理式と呼ぶ．

$$s = t, \qquad R(t_0, t_1, \cdots, t_{n-1}).$$

ここで，s, t および $t_0, t_1, \cdots, t_{n-1}$ は $\mathcal{L}$ の項，R は $\mathcal{L}$ の n 項関係記号である．

（2）　φ, ψ を言語 $\mathcal{L}$ の論理式，x を変数記号として，$\neg(\varphi), (\varphi)\wedge(\psi), (\varphi)\vee(\psi), (\varphi)\rightarrow(\psi), \forall x(\varphi), \exists x(\varphi)$ は言語 $\mathcal{L}$ の論理式である．（括弧は適当に省略する．）

例 3　$\mathcal{L}_{\mathrm{OR}} = (+, \cdot, 0, 1; <)$（順序環の言語）とする．この言語の類型は，$\rho = (2, 2, 0, 0; 2)$ である．自然数論の標準構造 $\mathfrak{N} = (\mathbf{N}; +, \cdot, 0, 1; <)$ は $\mathcal{L}_{\mathrm{OR}}$-構造である．ここで構造の中の $+, \cdot, 0, 1; <$ は自然数上の通常の関数や関係を表しており単なる記号列ではない．（例えば，1 が定数か $\mathbf{N}$ の要素かは文脈から判定できるのが普通なので，今後このような注意書きは省略する．）　この言語において，

（1）　$(x_0+1)\cdot x_2$ は項である．

（2）　$(x_0+1)\cdot x_2 < x_1$ は原子論理式である．

（3）　$\forall x_0\{(x_0+1)\cdot x_2 < x_1\} \wedge \forall x_1 \exists x_3 (x_1 \cdot x_2 = x_3)$ は論理式である．

ある論理式を構成する過程で現れる論理式をその**部分式**(subformula)と呼ぶ．上例の (3) の論理式の部分式は，2 つの原子部分式 $(x_0+1)\cdot x_2 < x_1$，$x_1 \cdot x_2 = x_3$ と自分自身の他に，$\forall x_0\{(x_0+1)\cdot x_2 < x_1\}$，$\exists x_3(x_1\cdot x_2 = x_3)$，$\forall x_1 \exists x_3 (x_1 \cdot x_2 = x_3)$ がある．ある論理式において，$\forall x\, \varphi(x)$ または $\exists x\, \varphi(x)$ の形の部分式の中に含まれる変数 x を**束縛変数**(bound variable)といい，そうでないものを**自由変数**(free variable)という．上例の (3) においては，x_0 と x_3 は束縛変数，x_2 は自由変数，x_1 は自由変数としても束縛変数としても現れる．論理式 φ に含まれるいくつかの変数（例えば x, y）の自由な現れに注目して，その論理式を $\varphi(x, y)$ のように記すことがある．そして，論理式 $\varphi(x)$ における変数 x の自由な出現をすべて項 s に置き換えてできる論理式を $\varphi(s)$ と書く．このとき次のような約束をしておく．代入項 s に含まれる変数が代入の結果束縛されてしまう場合，φ の束縛変数

の方を予め新しい変数に置き換えておく．例えば，$\forall y\, \varphi(x, y)$ に $x = s$ を代入する場合に，s が y を含むなら，$\varphi(x, y)$ にも s にも含まれない新しい変数を w として，$\forall w\, \varphi(x, w)$ と書き直してから，$x = s$ を代入する．

定義 3.1.5 論理式 φ に現れるすべての変数が束縛されているとき，φ を**文**(sentence)または**閉論理式**(closed formula)と呼ぶ．文の集合はしばしば**理論**(theory)と呼ばれる．また，量化記号をもたない論理式は，**量化記号なしの**(quantifier-free)論理式，または**開論理式**(open formula)と呼ばれる．

論理式 φ に現れるすべての自由変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を束縛して得られる文 $\forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n\, \varphi$ を，φ の**全称閉包**(universal closure)と呼ぶ．論理式とその全称閉包は，しばしば同一視される．論理式の集合を理論と呼ぶとき，各論理式は必要に応じて全称閉包に直して扱われる．

さて，次の目標は，文に対する真偽の概念を定義することである．まず，原子文に対する真偽を次のように定める．

定義 3.1.6 $\mathfrak{A}$ を言語 $\mathcal{L}$ における構造とする．

（1） 変数を含まない項 s, t に対し，$s^{\mathfrak{A}}$ と $t^{\mathfrak{A}}$ が同じ値であれば，原子論理式 $s = t$ は $\mathfrak{A}$ において**真**(true)であり，そうでなければ**偽**(false)であるという．

（2） R を $\mathcal{L}$ の n 項関係記号とし，$t_0, \cdots, t_{n-1}$ を変数を含まない項として，$R^{\mathfrak{A}}(t_0^{\mathfrak{A}}, \cdots, t_{n-1}^{\mathfrak{A}})$ が成り立つならば，原子論理式 $R(t_0, \cdots, t_{n-1})$ は $\mathfrak{A}$ において**真**(true)であり，そうでなければ**偽**(false)であるという．

一般の文に対する真偽を定めるために，$\mathcal{L}$-構造 $\mathfrak{A}$ の拡張を定義する．$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ をそれぞれ言語 $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ における構造とし，$\mathcal{L} \subset \mathcal{L}'$ とする．このとき，$\mathfrak{B}$ が $\mathfrak{A}$ の**拡張**(expansion)，または $\mathfrak{A}$ が $\mathfrak{B}$ の**縮約**(reduct)であるというのは，$|\mathfrak{A}| = |\mathfrak{B}|$ で，$\mathcal{L}$ の各記号に対する $\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}$ の解釈が一致する場合である．いま，B を領域 $A = |\mathfrak{A}|$ の部分集合とし，B の各要素 b に対する新

しい定数 b^* を $\mathcal{L}$ に加えた言語を $\mathcal{L}_B$ で表す．すなわち，$\mathcal{L}_B = \mathcal{L} \cup \{b^* : b \in B\}$．そして，定数 b^* の解釈を b として，構造 $\mathfrak{A}$ を言語 $\mathcal{L}_B$ に拡張したものを $\mathfrak{A}_B$ で表す．特に，$\mathfrak{A}_\varnothing = \mathfrak{A}$ である．構造 $\mathfrak{A}$ における文の真偽の概念は，拡張構造 $\mathfrak{A}_A$ を介して定義される．以下では，表記上の簡潔さのため，$|\mathfrak{A}|$ の要素 a と定数 a^* を区別しない．

定義 3.1.7 構造 $\mathfrak{A}_A$ で真となる文全体 $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A)$ を下記の **Tarski の真理(定義)条項**(truth (definition) clauses)を満たすものと定める．

- L_A の原子文 φ について，$\varphi \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A) \Leftrightarrow \varphi$ は $\mathfrak{A}_A$ で真,
- $\neg\varphi \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A) \Leftrightarrow \varphi \notin \mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A)$,
- $\varphi \wedge \psi \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A) \Leftrightarrow \varphi \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A)$ かつ $\psi \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A)$,
- $\varphi \vee \psi \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A) \Leftrightarrow \varphi \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A)$ または $\psi \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A)$,
- $\varphi \rightarrow \psi \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A) \Leftrightarrow \varphi \notin \mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A)$ または $\psi \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A)$,
- $\forall x\, \varphi(x) \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A) \Leftrightarrow$ すべての定数 $a \in A$ について，
  $\varphi(a) \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A)$,
- $\exists x\, \varphi(x) \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A) \Leftrightarrow$ ある定数 $a \in A$ が存在して，
  $\varphi(a) \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A)$.

$\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A)$ は構造 $\mathfrak{A}$ の**初等ダイヤグラム**(elementary diagram)と呼ばれ，また $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A)$ に含まれる原子文と原子文の否定だけを集めた集合を構造 $\mathfrak{A}$ の**(基本)ダイヤグラム**((basic) diagram)といい，$\mathrm{Diag}(\mathfrak{A})$ で表す．

定義 3.1.8 $\mathcal{L}$ の文 φ が $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A)$ に属するとき，φ は構造 $\mathfrak{A}$ で**真**(true)であるといい，$\mathfrak{A} \models \varphi$ または $\varphi \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ と書く．一般の論理式 φ に対しては，その全称閉包 $\forall x_0 \cdots \forall x_{n-1}\, \varphi$ が構造 $\mathfrak{A}$ で真であるときに，$\mathfrak{A} \models \varphi$ とする．

定義 3.1.9 言語 $\mathcal{L}$ の文の集合 T が $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ の部分集合になるとき，構造 $\mathfrak{A}$ は理論 T の**モデル**(model)であるといい，$\mathfrak{A} \models T$ と書く．

定義 3.1.10　T を言語 $\mathcal{L}$ の文の集合とし，φ を $\mathcal{L}$ の論理式とする．T の任意のモデル $\mathfrak{A}$ において，$\mathfrak{A} \models \varphi$ となるとき，φ は T の**帰結**(consequence)であるといい，$T \models \varphi$ と書く．

$T \models \varphi$ は，普通の数学の意味で公理系 T において命題 φ が成り立つことを表している．この関係が演繹体系の証明可能性として形式化できるという結果が，Gödel の完全性定理である．次節では，述語論理の代表的な演繹体系の1つとして Gentzen-Tait による体系 GT を紹介し，続く 3.3 節においてその完全性を証明する．

3.2　形式体系 GT

論理の演繹体系は必ず公理と推論規則からできているが，そのどちらに重点を置くかでおおよそ2つの系統に別れる．公理を主としたものを Hilbert 流，推論規則を主としたものを Gentzen 流と呼ぶことが多い．また，前節では6つの論理記号（$\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \forall, \exists$）を使って論理式等を定義したが，その記号のいくつかは他の記号を使って表せるので，形式体系を定義する際は論理記号を適当に省略して記述するのが便利である．ここでは，$\wedge, \vee, \forall, \exists$ および制限された否定 $\neg$ をもつ Gentzen 流の体系を紹介しよう．これは Gentzen の体系を W. Tait が改良したもので，ここでは Gentzen-Tait の体系 GT と呼ぶ．（Hilbert 流の公理系とそれに対する完全性定理については，文献[田 1]を参照．）

まず，$\varphi \rightarrow \psi$ は $\neg\varphi \vee \psi$ の略記と考える．否定 $\neg$ に関しては，次の置き換え規則(**ド・モルガン則**(De Morgan's law))を可能な限り適用して，すべての否定記号を原子論理式の直前まで移動させる．

$$\neg(\varphi \vee \psi) := \neg\varphi \wedge \neg\psi,$$

$$\neg(\varphi \wedge \psi) := \neg\varphi \vee \neg\psi,$$

$$\neg\forall x\,\varphi \quad := \exists x\,\neg\varphi,$$
$$\neg\exists x\,\varphi \quad := \forall x\,\neg\varphi,$$
$$\neg\neg\varphi \quad := \varphi.$$

つまり，任意の論理式 φ は，原子論理式と原子論理式の否定から $\wedge, \vee, \forall$, $\exists$ によって組立てられた論理式に変形される．以下では，上の式変形は自動的に行われるものとする．また，$\neg s = t$ を $s \neq t$ と略記する．

定義 3.2.1 論理式の有限列 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ を**シークエント**(sequent)と呼び，その要素を並べ換えてできる列はみな同一視する．(したがって，シークエントは列というよりも，多重集合(multiset)である．) 2つのシークエント $\Gamma(=\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ と $\Delta(=\psi_1, \cdots, \psi_n)$ に対し，Γ, Δ で結合シークエント $\varphi_1, \cdots, \varphi_n, \psi_1, \cdots, \psi_n$ を表す．

シークエント $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ が意味するところは $\varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_n$ と同じである．Gentzen-Tait の体系は，論理式をシークエントに拡張して(あるいは，シークエントにばらして)扱う体系である．

定義 3.2.2 理論 T の **Gentzen-Tait の体系**(Gentzen-Tait system)GT は，次の公理と推論規則からなる．

公理(axioms)

(0) φ, 但し $\varphi \in T$.

(1) (排中律) $\neg\psi, \psi$, 但し ψ は原子論理式.

(2) (等号公理)

(i) $x = x$.

(ii) $x \neq y, y = x$.

(iii) $x \neq y, y \neq z, x = z$.

(iv) $x_1 \neq y_1, \cdots, x_m \neq y_m, f(x_1, \cdots, x_m) = f(y_1, \cdots, y_m)$.

(v) $x_1 \neq y_1, \cdots, x_n \neq y_n, R(x_1, \cdots, x_n), \neg R(y_1, \cdots, y_n)$.

推論規則(inference rules)

$$\frac{\Gamma, \varphi, \psi}{\Gamma, \varphi \vee \psi}(\vee), \qquad \frac{\Gamma, \varphi \quad \Gamma, \psi}{\Gamma, \varphi \wedge \psi}(\wedge),$$

$$\frac{\Gamma, \varphi(t)}{\Gamma, \exists x\, \varphi(x)}(\exists), \quad \frac{\Gamma, \varphi(x)}{\Gamma, \forall x\, \varphi(x)}(\forall)\ (\Gamma \text{ は } x \text{ の自由な出現をもたない}),$$

$$\frac{\Gamma}{\Delta}(\text{増})\ (\Gamma \text{ は } \Delta \text{ の部分列}), \qquad \frac{\Gamma, \neg A \quad \Gamma, A}{\Gamma}(\text{cut}).$$

定義 3.2.3 理論 T の(体系 GT における)**証明木**(proof tree)は，各頂点にシークエントのラベルが付けられた有限木で，その最上点(葉)には公理のラベルが付けられ，それ以外の頂点はその上の頂点との間に推論規則が成立するようなラベルが付けられているものとする．そして，シークエント Γ を根とする証明木が存在するとき，$T \vdash \Gamma$ と書き，その木を $T \vdash \Gamma$ の(あるいは，T における Γ の)**証明**(proof)という．$T = \varnothing$ もしくは T が文脈から明らかな場合，T を省略して $\vdash \Gamma$ とも書く．

例 4 $\vdash \neg\varphi \vee (\neg\psi \vee (\varphi \wedge \psi))$ の証明を示す．但し，φ, ψ は原子論理式である．

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\neg\varphi, \varphi}{\neg\varphi, \varphi, \neg\psi}(\text{増}) \quad \cfrac{\neg\psi, \psi}{\neg\psi, \psi, \neg\varphi}(\text{増})}{\neg\varphi, \neg\psi, \varphi \wedge \psi}(\wedge)}{\neg\varphi, \neg\psi \vee (\varphi \wedge \psi)}(\vee)}{\neg\varphi \vee (\neg\psi \vee (\varphi \wedge \psi))}(\vee)$$

例 5 任意の項 t について，$\vdash t = t$ がいえる．

$$\cfrac{\cfrac{x = x}{\forall x (x = x)}(\forall) \quad \cfrac{t \neq t,\ t = t}{\exists x (x \neq x),\ t = t}(\exists)}{t = t}(\text{cut})$$

他の等号公理についても同様にして変数に任意の項を代入したものが証明できる．

問題 1 等号公理 (v) $x_1 \neq y_1, \cdots, x_n \neq y_n, R(x_1, \cdots, x_n), \neg R(y_1, \cdots, y_n)$ で R が等式になる場合を認めれば，それと等号公理 (i) を用いて等号公理 (ii) と (iii) が導かれることを示せ．

補題 3.2.4 任意の論理式 φ について，$\vdash \neg\varphi, \varphi$.

証明 φ の構成に関する帰納法によって示す．φ が原子論理式のときは，公理である．$\varphi = \psi \vee \theta$ のとき，$\neg\varphi = \neg\varphi \wedge \neg\theta$ であり，

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\neg\psi, \psi}{\neg\psi, \psi, \theta}(\text{増})}{\neg\psi, \psi \vee \theta}(\vee) \qquad \cfrac{\cfrac{\neg\theta, \theta}{\neg\theta, \psi, \theta}(\text{増})}{\neg\theta, \psi \vee \theta}(\vee)}{\neg\psi \wedge \neg\theta, \psi \vee \theta}(\wedge).$$

φ が他の形の論理式の場合も同様なので，残りは演習問題とする． □

この補題により，例 4 において，φ, ψ は原子論理式に限らず一般の論理式にとれることがわかる．

3.3 完全性定理

この節では，前節で導入した形式体系 GT に対して完全性定理を証明し，そのいくつかの応用について述べる．

定理 3.3.1 (**演繹定理**(deduction theorem)) 言語 $\mathcal{L}$ における理論 T，文 φ，シークエント Γ に対して，

$$T \cup \{\varphi\} \vdash \Gamma \Rightarrow T \vdash \neg\varphi, \Gamma.$$

証明 $T \cup \{\varphi\} \vdash \Gamma$ の証明木 P に現れるすべてのシークエントに論理式 $\neg\varphi$ を付け加えた木を P' とする．P の最上点以外の頂点における推論規則の関係はこの書き換えのあとでも同種の推論規則になる(注．$\neg\varphi$ は文なので規則 ($\forall$) の条件が保たれる．)が，P' の最上点のラベルはそのまま公理になるとは限らない．P の最上点がラベル φ をもつとき，P' の対応する頂点のラベルは $\neg\varphi, \varphi$ であり，これは排中律である．P の最上点がそれ以外の公理 Δ のとき，P' の対応する頂点のラベルは $\neg\varphi, \Delta$ だから，その上に Δ をラベルとする頂点を付け足せば，両者の関係は推論規則 (増) となり，そ

のように修正した木 P'' の最上点はすべて T の公理となる．すなわち，P'' は，$T \vdash \neg\varphi, \Gamma$ の証明木である． □

上の定理において，Γ が1つの論理式 ψ からなる場合を考える．$T \vdash \neg\varphi, \psi$ は $T \vdash \varphi \rightarrow \psi$ と同等であるから，演繹定理によれば，理論 T において，φ を仮定して ψ を導けば $T \vdash \varphi \rightarrow \psi$ が得られることになる．このとき，次の2点に注意されたい．1つは，φ が文であること．（そうでないと，上の証明において P の各頂点に $\neg\varphi$ を加える操作で，推論規則 $(\forall)$ の条件をくずすかもしれない．） もう1つは，理論 T において φ を仮定することと，$T \vdash \varphi$ を仮定することの違いである．（実際，$T = \mathrm{ZF}$，$\varphi = \mathrm{AC}$ として，$T \vdash \varphi$ を仮定したら，これは矛盾であるから何でも導ける．）

定義 3.3.2 $\mathrm{T} \vdash$ であるとき，つまり T から空シークエントが証明されるとき，T は**矛盾する** (inconsistent) という．そうでないとき，T は**無矛盾である** (consistent) という．

補題 3.3.3 T を理論，φ を文として，次が成り立つ．

（1） $T \vdash \varphi$ かつ $T \vdash \neg\varphi$ となる φ があれば，T は矛盾する．

（2） $T \cup \{\neg\varphi\}$ が矛盾する $\Leftrightarrow$ $T \vdash \varphi$.

（3） $T \cup \{\neg\varphi\}$ が無矛盾である $\Leftrightarrow$ $T \vdash \varphi$ でない．

証明 (1) は推論規則 (cut) を用いれば直ちにいえる．(2) の $(\Rightarrow)$ は演繹定理による．(2) の $(\Leftarrow)$ を示す．$T \vdash \varphi$ ならば $T \cup \{\neg\varphi\} \vdash \varphi$．また明らかに $T \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\varphi$ だから，(1) より $T \cup \{\neg\varphi\}$ は矛盾する．(3) は (2) の対偶である． □

補題 3.3.4 T が無矛盾であれば，任意の文 φ に対して，$T \cup \{\varphi\}$ または $T \cup \{\neg\varphi\}$ は無矛盾である．

証明 上の補題 (1), (3) より明らか． □

補題 3.3.5 T を言語 $\mathcal{L}$ の理論，$\exists x\,\varphi(x)$ を $\mathcal{L}$ の文として，$T \cup \{\exists x\,\varphi(x)\}$ が無矛盾であれば，新しい定数 c を加えた言語 $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{c\}$ において $T \cup \{\varphi(c)\}$ も無矛盾である．

証明 結論を否定して，$T \cup \{\varphi(c)\} \vdash$ とする．演繹定理により，$T \vdash \neg\varphi(c)$ となる．いま，x を $T \vdash \neg\varphi(c)$ の証明に現れない変数とし，$T \vdash \neg\varphi(c)$ の証明中のすべての c を x に置き換えれば，$T \vdash \neg\varphi(x)$ の証明が得られる．その証明木の下に推論規則 $(\forall)$ を付け加えれば，$T \vdash \forall x\,\neg\varphi(x)$ すなわち $T \vdash \neg\exists x\,\varphi(x)$ の証明木が得られる．したがって，補題 3.3.2 (2) より $T \cup \{\exists x\,\varphi(x)\}$ は矛盾し，仮定に反する． □

次の補題は，Gödel の完全性定理の証明の核心になるもので，この補題そのものを完全性定理と呼ぶこともある．Birkhoff の完全性定理の証明では，項代数を合同関係で割ってモデルを作った．述語論理のモデルの構成も基本的な考え方は同じだが，求める構造がずっと複雑になるため，予め与えられた言語の項だけでは全体を表現しきれない．そこで，ヘンキン定数と呼ばれる新しい定数を導入して言語を拡張する．この拡張は，言語によって決まるもので，理論には依存しない．

補題 3.3.6 無矛盾な理論はモデルをもつ．

証明 与えられた無矛盾な理論のモデルを構成する準備として，その理論に対し 2 種類の加工処理をする．まず言語の拡張によるヘンキン化を行い，続けて完全化を行う．完全ヘンキン理論に対してのモデルの構成は，あとで見るように容易にできる．

最初に，$\mathcal{L}$ を任意の言語として，次のことを示そう．$\mathcal{L}$ に含まれない定数の集合 C（その濃度は $\mathcal{L}$ の濃度と可算無限の大きな方）と，$\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup C$ の文の集合 H が存在して，$\mathcal{L}$ におけるどんな無矛盾な理論 T に対しても以下が成り立つようにできる．

（0） $T \cup H$ は無矛盾である．

（1） $T \cup H \vdash \exists x\, \varphi(x)$ となる $\mathcal{L}'$ の各文 $\exists x\, \varphi(x)$ に対して，$T \cup H \vdash \varphi(c)$ となる $c \in C$ がある．

このような $T \cup H$ を T の**ヘンキン拡大**(Henkin extension)という．

C と H の作り方を述べる．まず，$\exists x\, \varphi(x)$ の形の $\mathcal{L}$ の各文に対して，定数 $c_{\exists x \varphi(x)}$ を用意し，それらの定数を全部集めて C_1 とする．また，$\neg \exists x\, \varphi(x) \vee \varphi(c_{\exists x \varphi(x)})$ の形の文をすべて集めて H_1 とする．$\vdash \neg \exists x\, \varphi(x) \vee \exists x\, \varphi(x)$ から $\vdash \exists x\, (\neg \exists x\, \varphi(x) \vee \varphi(x))$ が導けるので，どんな無矛盾な理論 T に対しても，$T \cup H_1$ が無矛盾であることは補題3.3.5よりわかる．次に，$\exists x\, \varphi(x)$ の形の $\mathcal{L} \cup C_1$ の各文に対して，定数 $c_{\exists x \varphi(x)}$ を用意し，それらを集めて $C_2 \supseteq C_1$ とし，$\neg \exists x\, \varphi(x) \vee \varphi(c_{\exists x \varphi(x)})$ の形の文を集めて $H_2 \supseteq H_1$ とする．どんな無矛盾な理論 T に対しても，$T \cup H_2$ は無矛盾である．この作業を繰り返して，無限増加列 $C_0 = \emptyset \subseteq C_1 \subseteq C_2 \subseteq \cdots$ および $H_0 = \emptyset \subseteq H_1 \subseteq H_2 \subseteq \cdots$ を作る．そして，最後に $C = \bigcup_{i<\omega} C_i$，$H = \bigcup_{i<\omega} H_i$ とおく．こうして作られる C に属する定数を**ヘンキン定数**(Henkin constant)，H に属する文を**ヘンキン公理**(Henkin axiom)と呼ぶ．（注．ω は最小の無限順序数を表し，$i < \omega$ は $i \in \mathbb{N}$ と同じ．）

上で構成した C と H が条件 (0), (1) を満たすことを示す．T を無矛盾な理論とする．もし $T \cup H$ が矛盾するなら，矛盾は $T \cup H$ の有限部分からも導けるはずだから，ある $i < \omega$ で $T \cup H_i$ も矛盾する．これは $\{H_i\}$ の構成に反する．また，$\mathcal{L} \cup C$ の文 $\exists x\, \varphi(x)$ は，ある $i < \omega$ について $\mathcal{L} \cup C_i$ の論理式になるから，$\neg \exists x\, \varphi(x) \vee \varphi(c_{\exists x \varphi(x)}) \in H_{i+1} \subseteq H$ である．よって $T \cup H \vdash \exists x\, \varphi(x)$ であれば，$T \cup H \vdash \exists x\, \varphi(x) \wedge \neg \varphi(c_{\exists x \varphi(x)})$，$\varphi(c_{\exists x \varphi(x)})$ も容易に導けるので，推論規則 (cut) より $T \cup H \vdash \varphi(c_{\exists x \varphi(x)})$ である．

次に，無矛盾な理論 T に対し，$T \cup H$ をさらに加工して，次の条件を満

たす S を作る．

（0）　$T \subseteq S$ であり，S は $\mathcal{L}'$ の無矛盾な理論である．

（1）　$S \vdash \exists x\, \varphi(x)$ となる $\mathcal{L}'$ の各文 $\exists x\, \varphi(x)$ に対して，$S \vdash \varphi(c)$ となる $\mathcal{L}'$ の定数 c がある．

（2）　$\mathcal{L}'$ の任意の文 φ に対して，$\varphi \in S$ または $\neg\varphi \in S$ となる．

このような S を T の**完全ヘンキン拡大**(complete Henkin extension)という．

S の作り方は以下のようである．言語 $\mathcal{L}'$ における文をすべて並べて(順序数を割り振って)，$\{\sigma_i\}_{i<\alpha}$ とする．(α は，$\mathcal{L}'$ の濃度と $\aleph_0$ の大きな方を表す順序数である．) このとき，無矛盾な集合の増加列 $\{S_i\}_{i<\alpha}$ を以下のように定める．

$$S_0 = T \cup H,$$

$$S_{i+1} = \begin{cases} S_i \cup \{\sigma_i\} & (S_i \cup \{\sigma_i\} \text{ が無矛盾のとき}), \\ S_i \cup \{\neg\sigma_i\} & (\text{そうでないとき}), \end{cases}$$

$$S_\beta = \bigcup_{i<\beta} S_i \qquad (\beta (< \alpha) \text{ が極限順序数のとき}).$$

そして，$S = \bigcup_{i<\alpha} S_i$ とおく．この S が条件 (0), (2) を満たすことは，構成法より明らか．S が条件 (1) を満たすことも，$S = S \cup H$ から明らか．1つ注意しておくと，S が (2) を満たすことから，$\mathcal{L}'$ における任意の文 σ について，次がいえる．

$$\sigma \in S \Leftrightarrow S \vdash \sigma.$$

それでは，無矛盾な理論 T に対し，ヘンキン定数の集合 C と完全ヘンキン拡大 S を用いて，T のモデルを構成しよう．まず，C の上の同値関係 $\approx$ を次のように定義する．

$$c \approx d \Leftrightarrow (c = d) \in S.$$

$\approx$ が合同関係になっていることは，S が等号公理を含むことから直ちにいえる．そこで，同値類 $[c] = \{d \in C : c \approx d\}$ の全体を A とする．そし

て，$\mathcal{L}$ の関数記号 f と関係記号 R の解釈をそれぞれ次のように定めることで，$\mathcal{L}$-構造 $\mathfrak{A} = (A, f^{\mathfrak{A}}, \cdots, R^{\mathfrak{A}}, \cdots)$ を定義する．

$$f^{\mathfrak{A}}([c_0], [c_1], \cdots, [c_{m-1}]) = [d] \Leftrightarrow (f(c_0, c_1, \cdots, c_{m-1}) = d) \in S,$$

$$R^{\mathfrak{A}}([c_0], [c_1], \cdots, [c_{n-1}]) \Leftrightarrow R(c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}) \in S.$$

上の定義の妥当性は，$\approx$ が合同関係になることから明らか．

最後に，$\mathcal{L}$ の任意の論理式 $\varphi(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1})$ (表示されていない自由変数は含まない) に対して，

$$\varphi([c_0], [c_1], \cdots, [c_{n-1}]) \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A) \Leftrightarrow \varphi(c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}) \in S$$

となることを，論理式の複雑さに関する帰納法で証明する．φ が原子論理式の場合は，$\mathfrak{A}$ の定義から直ちにしたがう．$\varphi = \psi \vee \theta$ の場合は，

$$\begin{aligned} \psi \vee \theta \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A) &\Leftrightarrow \psi \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A) \text{ または } \theta \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A) \\ &\Leftrightarrow \psi \in S \text{ または } \theta \in S \Leftrightarrow \psi \vee \theta \in S. \end{aligned}$$

$\varphi = \exists x\, \psi(x)$ の場合は，

$$\begin{aligned} \exists x\, \psi(x) \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A) &\Leftrightarrow \psi([c]) \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A) \text{ となる } c \text{ がある} \\ &\Leftrightarrow \psi(c) \in S \text{ となる } c \text{ がある} \Leftrightarrow \exists x\, \psi(x) \in S \end{aligned}$$

最後の $\Leftrightarrow$ の左向き $\Leftarrow$ において，S の条件 (1) が用いられる．その他の形の論理式についても同様に扱える．

よって，$\mathfrak{A}$ は S のモデルであり，したがって T のモデルでもある． □

定理 3.3.7 (**Gödel の完全性定理**(completeness theorem))

$$T \vdash \varphi \Leftrightarrow T \models \varphi.$$

証明 “$T \vdash \varphi$ ならば $T \models \varphi$” は簡単にわかる．実際，シークエント $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ の真偽を $\varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_n$ の真偽と考えれば，T の公理，排中律，等号公理は T の任意のモデルで真である．また，各推論規則において前提が真であれば結論も真になることは明らかだから，証明木に現れるシークエントはすべて真であり，証明可能なシークエント，特に論理式は T の任意のモデルで真である．

逆を示すために，$T \vdash \varphi$ でないと仮定する．φ が自由変数 $x_0, \cdots, x_n$ を含むときは，φ の代わりに $\forall x_0 \cdots \forall x_n \varphi$ を考え，φ は文であると仮定してよい．すると，補題 3.3.3 より，$T \cup \{\neg \varphi\}$ は無矛盾である．したがって，補題 3.3.6 によって，$T \cup \{\neg \varphi\}$ はモデルをもつので，$T \models \varphi$ でないことになり，完全性定理が証明された． □

定理 3.3.8 (**コンパクト性定理**(compactness theorem)) 理論 T がモデルをもつための必要十分条件は，T の任意の有限部分集合がモデルをもつことである．

証明 必要性は明らかなので，十分性を示す．T の任意の有限部分集合がモデルをもつとすれば，任意の有限部分集合が無矛盾であるから，T 自身も無矛盾である．よって，完全性定理により，T はモデルをもつ． □

問題 2 $T_1 \cup T_2$ が矛盾していれば，ある文 σ が存在して，$T_1 \vdash \sigma$ かつ $T_2 \vdash \neg\sigma$ となることを示せ．

問題 3 次を示せ． (1) 群に(演算を保存するような)順序が入るための必要十分条件は，すべての有限生成部分群に対し順序が入ることである．

(2) アーベル群に順序が入るための必要十分条件は，ねじれがないことである．(注．加群 $\mathfrak{G} = (G, +)$ において，ある $n > 0$ に対して $na = 0$ となる元 $a \neq 0$ をねじれという．)

定理 3.3.9 (**Löwenheim-Skolem の下降定理**(downward theorem)) 言語 $\mathcal{L}$ における無矛盾な理論は，$\mathcal{L}$ の濃度以下もしくは高々可算のモデルをもつ．

証明 完全性定理とその補題の証明において，ヘンキン定数の集合 C は可算無限もしくは $\mathcal{L}$ と同じ濃度をもつ．これから同値類をとって $\mathfrak{A}$ を作っても，$|\mathfrak{A}|$ の濃度は高々可算もしくは $\mathcal{L}$ の濃度以下である． □

この定理により，可算言語で公理化される実数論や集合論は可算のモデルをもつことになる．集合論は非常に大きな非可算集合を扱っているはずなのに，集合論のモデルが可算であるというのは一見不合理のように思われる(**Skolem のパラドックス**)．しかし，可算であるということは，自然数全体と1対1の対応があるということだから，もしそういう対応を与える関数がモデルの外に存在すれば，モデル内においては非可算に見えるが，外では可算集合として扱えるものがあっても不思議はない．つまり，Skolem のパラドックスは，パラドックスというより，濃度の概念の相対性を示した画期的な発見といえる．歴史的には，Skolem の発見が Gödel の完全性定理より前にあり，後者の発見のきっかけを与えたという説が有力である．

定理 3.3.10 (**Löwenheim - Skolem - Tarski の上昇定理**(upward theorem)) 言語 $\mathcal{L}$ の理論が無限モデルをもてば，$\mathcal{L}$ の濃度以上の任意の濃度のモデルをもつ．

証明 $\mathfrak{A}$ を $\mathcal{L}$ の理論 T_0 の無限構造とし，κ を $\mathcal{L}$ の濃度以上の基数とする．κ 個の新しい定数の集合 C を用意して，

$$T = T_0 \cup \{c \neq d : c \text{ と } d \text{ は } C \text{ に属する相異なる定数である.}\}$$

とおく．すると，T の任意の有限部分集合 T' はモデル $\mathfrak{A}'$ をもつ．実際，$\mathfrak{A}'$ は $\mathfrak{A}$ に C の定数の解釈を適当に加えて，T' に含まれる有限個の式 $c \neq d$ が成り立つようにするだけでよい．よって，コンパクト性定理から，T 全体もモデルをもつことになるが，T の性質からどのモデルの濃度も κ 以上になる．他方，下降定理により，T は濃度 κ 以下のモデルをもつので，結局ちょうど濃度 κ のモデルが存在することになる． □

この定理により，どんな自然数の公理系も無矛盾である限り非可算モデルをもつことがわかる．

3.4 言語の拡張と理論の翻訳

この節では言語の変化や差異が理論(公理系)に及ぼす影響について考える．我々の興味はむしろ影響を及ぼさない場合にあるが，それを調べるとき完全性定理を応用して構造の側から扱うと容易になることが多い．

定義 3.4.1 T, T' をそれぞれ言語 $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ における理論とし，$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ とする．このとき，$\mathcal{L}$ の任意の文 σ に対して，

$$T \vdash \sigma \Leftrightarrow T' \vdash \sigma$$

が成り立つならば，T' は T の**保存的拡大**(conservative extention)であるという．

定理 3.4.2 $\varphi(x_1, \cdots, x_n, y)$ を言語 $\mathcal{L}$ における論理式で，$x_1, \cdots, x_n, y$ 以外の自由変数をもたないものとする．このとき，$T \vdash \forall x_1 \cdots \forall x_n \exists y \ \varphi(x_1, \cdots, x_n, y)$ ならば，新しい n 変数関数記号 f を導入した拡大理論 $T' = T \cup \{\forall x_1 \cdots \forall x_n \ \varphi(x_1, \cdots, x_n, f(x_1, \cdots, x_n))\}$ は T の保存的拡大である．

証明 $\mathfrak{A}$ を T の任意のモデルとする．$T \vdash \forall x_1 \cdots \forall x_n \exists y \ \varphi(x_1, \cdots, x_n, y)$ ならば，$\mathfrak{A}$ の上で $\forall x_1 \cdots \forall x_n \ \varphi(x_1, \cdots, x_n, f(x_1, \cdots, x_n))$ を成り立たせる関数 $f^{\mathfrak{A}}$ が作れる(選択公理を使用)．それを $\mathfrak{A}$ に加えた構造 $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A} \cup \{f^{\mathfrak{A}}\}$ は，明らかに T' のモデルである．言語 $\mathcal{L}$ における T' の定理 σ は $\mathfrak{A}^*$ において真となるが，その真偽は f の解釈と無関係だから，$\mathfrak{A}$ でも真となるはずである．最後に，$\mathfrak{A}$ は T の任意のモデルだから，完全性定理により $T \vdash \sigma$ がいえる． □

この定理の特殊な場合として，次の系を得る．

系 3.4.3 $T \vdash \exists x \ \varphi(x)$ ならば，新しい定数 c を用いて拡大した理論 $T' = T \cup \{\varphi(c)\}$ は T の保存的拡大である．

数学では次のような論法を常用している．$\varphi(x)$ となる x の存在が示されたら，そのような x を1つ選んで c とし，以下 c を固定して扱う．このような論法の妥当性を示したのが上の定理や系である．

さて，φ を開論理式(量化記号をもたない論理式)としたとき，$\forall x_1 \cdots \forall x_n\, \varphi$ の形の論理式を **∀ 論理式**と呼ぶ．上の定理を用いて，次のことがいえる．

定理 3.4.4 すべての理論 T は，∀ 文だけからなる保存的拡大理論 T' をもつ．

証明 $\mathcal{L}$ を任意の言語とする．$\mathcal{L}$ における $\exists y\, \varphi(x_1, \cdots, x_n, y)$ の形の論理式 ($x_1, \cdots, x_n$ 以外の自由変数をもたない)各々に対し，新しい関数記号 $f_{\exists y \varphi(x_1, \cdots, x_n, y)}$ を用意し，それらを集めて F_1 とする．そして，

$$S_1 = \{\forall x_1 \cdots \forall x_n\, (\exists y\, \varphi(x_1, \cdots, x_n, y) \leftrightarrow \varphi(x_1, \cdots, x_n, f_{\exists y \varphi(x_1, \cdots, x_n, y)}(x_1, \cdots, x_n))) : \exists y\, \varphi(x_1, \cdots, x_n, y) \text{ は } \mathcal{L} \text{ の論理式}\}$$

とおく．$\mathcal{L}$ のどんな理論 T に対しても，$T \cup S_1$ が T の保存的拡大になることは上の定理より明らか．次に，言語 $\mathcal{L} \cup F_1$ における $\exists y\, \varphi(x_1, \cdots, x_n, y)$ の形の式に対して，新しい関数記号を用意して集合 F_2 を作り，同様に S_2 を定める．このような作業(スコーレム拡大)を繰り返して，最後に $F = \bigcup_{i<\omega} F_i$，$S = \bigcup_{i<\omega} S_i$ とおく．すると，$\mathcal{L}$ のどんな理論 T に対しても，$T \cup S$ は T の保存的拡大になっており，それを T の**(反復)スコーレム拡大**((iterated) Skolem extension)と呼ぶ．また，F に属する関数記号を**スコーレム関数**(Skolem function)，S に属する文を**スコーレム公理**(Skolem axiom)と呼ぶ．(これらは，完全性定理の証明に現れるヘンキン定数やヘンキン公理を一般化したものになっているが，歴史的に見れば，Henkin が Skolem の議論を簡単化することで，完全性定理に別証明を与えたのである．)

スコーレム公理(全体) S のもとでは，$\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup F$ のどんな論理式 φ も

$\forall$ 論理式と同値になる．大雑把にいえば，存在記号 $\exists y$ をスコーレム関数に置き換える作業を繰り返すだけだが，厳密には φ の構成に関する帰納法で示す．また，内側から存在記号を消去していけば，スコーレム公理を以下の形に制限しても十分である．

$$S' = \{\forall x_1 \cdots \forall x_n \forall y (\varphi(x_1, \cdots, x_n, y) \rightarrow \varphi(x_1, \cdots, x_n, f_{\exists y \varphi(x_1, \cdots, x_n, y)}(x_1, \cdots, x_n))) : \varphi(x_1, \cdots, x_n, y) \text{ は } \mathcal{L}' \text{ の開論理式}\}$$

ここで，S' のすべての論理式が $\forall$ 文であることに注意せよ．

いま，理論 T の各々の公理(文)に対し，それと S' において同値になる $\mathcal{L}'$ の $\forall$ 文を集めて T'' とする．すると，$T' = T'' \cup S'$ は $\forall$ 文だけからなる T の保存的拡大である．　□

次に，2つの異なる言語における理論の翻訳について考えよう．最初に，定義による関数記号の導入について述べる．あとで見るように，これは翻訳の特殊な場合である．以下で，$\exists! y\, \psi(y)$ は $\exists y\, \psi(y) \wedge \forall y_1 \forall y_2 (\psi(y_1) \wedge \psi(y_2) \rightarrow y_1 = y_2)$ の略記であり，「$\psi(y)$ を満たす y がただ1つ存在する」ことを意味する．

T を $\mathcal{L}$ における理論とする．$\mathcal{L}$ の論理式 $\varphi(x_1, \cdots, x_n, y)$ は，$x_1, \cdots, x_n, y$ 以外の自由変数をもたないものとし，$T \vdash \forall x_1 \cdots \forall x_n \exists! y\, \varphi(x_1, \cdots, x_n, y)$ とする．このとき，新しい関数記号 f を導入して拡大した理論 $T' = T \cup \{\forall x_1 \cdots \forall x_n \forall y\, (\varphi(x_1, \cdots, x_n, y) \leftrightarrow f(x_1, \cdots, x_n) = y)\}$ を，T の**定義による拡張**(expansion by definition)という．これが T の保存的拡大になっていることは，定理3.4.2から直ちにわかる．

いま，$\mathcal{L} \cup \{f\}$ の論理式 ψ が与えられたとき，次のような変形を行って，$\mathcal{L}$ の論理式 ψ^{-f} を作る．

(1)　ψ が f を含まなければ，$\psi^{-f} = \psi$ として終了．

(2)　ψ が f を含むとき，それを含む原子部分式の1つを θ とし，その中に現れる部分項 $f(t_0, \cdots, t_{n-1})$ で，どの引数 t_i も f を含まないようなも

のを選ぶ.

(3) θ において, (2) で選んだ部分項を新しい変数 y に置き換えたものを $\theta_1(y)$ とする.

(4) ψ の θ を $\exists y\,(\varphi(t_0, \cdots, t_{n-1}, y) \wedge \theta_1(y))$ で置き換えたものを改めて ψ とし, (1) に戻る.

こうして作った ψ^{-f} について,

$$T' \vdash \psi \leftrightarrow \psi^{-f}$$

となることは次の事実から明らかであろう.

補題 3.4.5 T を $\mathcal{L}$ の理論とし, φ を $\mathcal{L}$ の論理式, θ をその部分論理式とする. いま, φ における θ の出現(のいくつか)を $\mathcal{L}$ の論理式 θ' で置き換えたものを φ' とすれば, $T \vdash \theta \leftrightarrow \theta'$ のとき $T \vdash \varphi \leftrightarrow \varphi'$ となる.

証明 完全性定理により, T の任意のモデル $\mathfrak{A}$ で $\theta \leftrightarrow \theta'$ が成り立てば, T の任意のモデル $\mathfrak{A}$ で $\varphi \leftrightarrow \varphi'$ が成り立つことをいえばよい. しかし, これは Tarski の真理定義条項(定理 3.1.7)より明らかである. □

関係記号についても同様なことがいえる. 新しい関係記号 R を使って, $T' = T \cup \{\forall x_1 \cdots \forall x_n\,(\varphi(x_1, \cdots, x_n) \leftrightarrow R(x_1, \cdots, x_n))\}$ とすると, T' は T の保存的拡大である. そして, 論理式 ψ に含まれるすべての $R(t_1, \cdots, t_n)$ を $\varphi(t_1, \cdots, t_n)$ に置き換えた式を ψ^{-R} とすればやはり

$$T' \vdash \psi \leftrightarrow \psi^{-R}$$

がいえる.

以上の準備のもとで, 言語の翻訳を定義しよう.

定義 3.4.6 言語 $\mathcal{L}'$ における理論 T' が与えられているとする. 次を満たすペア $\langle U, I \rangle$ を言語 $\mathcal{L}$ の (T' における) **翻訳**(interpretation, translation) という.

（1） U は，$\mathcal{L}'$ の1変数論理式である．（$\mathcal{L}$ の理論の領域を表す．）

（2） I は，$\mathcal{L}$ から $\mathcal{L}'$ の論理式への関数であり，f が n 変数関数記号のときは $I(f)$ は $n+1$ 変数の論理式，R が n 項関係記号のときは $I(R)$ も n 変数の論理式である．

（3） $T' \vdash \exists x\, U(x)$.

（4） $T' \vdash \forall x_1 \cdots \forall x_n\, (U(x_1) \wedge \cdots \wedge U(x_n) \rightarrow$

$$\exists ! y\, (I(f)(x_1, \cdots, x_n, y) \wedge U(y)))．$$

次に，$\mathcal{L}$ の論理式を翻訳したいのだが，直接 $\mathcal{L}'$ の論理式に翻訳するのは大変なので，$\mathcal{L}'$ を定義によって拡大し，そこに翻訳を考える．$\mathcal{L}'$ の拡大はとても簡単で，$I(f)$ から(多少手を加えて)定義される関数記号を f とし，$I(R)$ で定義される関係記号を R とする．ここで考慮すべき問題点は，$T \vdash \forall x_1 \cdots \forall x_n \exists ! y\, I(f)(x_1, \cdots, x_n, y)$ が必ずしも成り立っていないことである．しかし，いま任意の定数 a をとって，

$$\begin{aligned} &I'(f)(x_1, \cdots, x_n, y) \\ &\quad \Leftrightarrow ((U(x_1) \wedge \cdots \wedge U(x_n)) \wedge I(f)(x_1, \cdots, x_n, y) \wedge U(y)) \\ &\qquad \vee ((\neg U(x_1) \vee \cdots \vee \neg U(x_n)) \wedge y = a) \end{aligned}$$

とおけば，$I'(f)$ は上の条件を満たし，これによって定義される関数を f とすればよい．

このように $\mathcal{L}'$ を拡大しておけば，$\mathcal{L}$ の項は翻訳後もそのままであるから，原子論理式も変わらず，命題結合記号もそのまま保存される．注意すべきところは量化記号の扱いだけである．いま，$\mathcal{L}$ の論理式 φ の翻訳結果を φ^I で表せば，

（1） $(\exists x\, \psi)^I$ は，$\exists x\, (U(x) \wedge \psi^I)$ である．

（2） $(\forall x\, \psi)^I$ は，$\forall x\, (U(x) \rightarrow \psi^I)$ である．

定義 3.4.7 T を $\mathcal{L}$ の理論とする．$\langle U, I \rangle$ を言語 $\mathcal{L}$ の T' における翻訳とする．$\mathcal{L}$ の任意の文 σ に対して，

$$T \vdash \sigma \Rightarrow T' \vdash \sigma^I$$

が成り立つならば，$\langle U, I \rangle$ を理論 T の (T' における)**翻訳**(interpretation) といい，このような $\langle U, I \rangle$ があるとき T は T' で**翻訳可能**(interpretable) という．さらに，

$$T \vdash \sigma \Leftrightarrow T' \vdash \sigma^I$$

ならば，$\langle U, I \rangle$ を T の (T' における)**忠実な翻訳**(faithful interpretation) という．

例 6 T が T' の定義による拡張であれば，T の T' における忠実な翻訳 $\langle U, I \rangle$ が存在する．$U(x)$ を $x = x$ とおき，定義された関数 f または関係 R に対し，$I(f)$ または $I(R)$ をその定義式とし，それ以外の記号の翻訳は自明のものを対応させればよい．

例 7 $\mathfrak{N} = (\mathbf{N}, +, \cdot, 0, 1, <)$，$\mathfrak{Z} = (\mathbf{Z}, +, \cdot, 0, 1)$ とする．$\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ から $\mathrm{Th}(\mathfrak{Z})$ へ忠実な翻訳 $\langle U, I \rangle$ が存在する．

$$U(x) \equiv \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \exists x_4 (x = x_1 \cdot x_1 + \cdots + x_4 \cdot x_4),$$
$$I(+)(l, m, n) \equiv l + m = n, \qquad I(\cdot)(l, m, n) \equiv l \cdot m = n,$$
$$I(0)(n) \equiv n = 0, \qquad I(1)(n) \equiv n = 1,$$
$$I(<)(m, n) \equiv \exists x\, U(x) \wedge x \neq 0 \wedge m + x = n.$$

問題 4 $\mathrm{Th}(\mathfrak{Z})$ から $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ に忠実な翻訳 $\langle U, I \rangle$ が存在することを示せ．

問題 5 ペアノ算術 PA は，ZF 集合論で翻訳可能であることを示せ．また，ZF 集合論から“無限の公理”を除いた体系は，PA で翻訳可能であることを示せ．

T から T' への忠実な翻訳が存在するとき，T における証明可能性は，T' のそれに還元される．したがって，T' の証明可能性が扱い易いものであれば(例えば，T' が決定可能であれば)，T も同様になる．逆に，決定不能だとわかっている理論 T を翻訳させることで，T' の決定不能性を示す論法も有力である．

補足 1. 多領域論理

最後に，述語論理の自然な拡張である**多領域論理**(many sorted logic)について述べておこう．数学の理論では，2種類以上の異なった対象を同時に扱うことがよくある．例えば，ベクトル空間ならスカラーとベクトル，3次元射影幾何なら点と線と面，などである．このような場合，構造 $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \cdots$ の個別の性質と，複数の構造にまたがる性質を同時に議論する必要がある．

この状況は一見複雑に見えるが，容易に普通の述語論理の枠組みに納めることができる．すなわち，全体領域として $U = A \cup B \cup C \cup \cdots$ をとり，各領域 $A, B, C, \cdots$ をそれぞれ1変数述語で表現すればよい．射影幾何を普通の1階述語論理で議論するなら，“x は点である”，“x は線である”，“x は面である”という意味の関係記号をそれぞれ $P(x), L(x), F(x)$ とし，例えば，“すべての点 x について，…”は $\forall x(P(x) \to \cdots)$ で表せばよい．

例 8　射影平面幾何にはいろいろな公理系があるが，基本体系Bは以下のようである．$P(x)$ は“x は点である”，$L(x)$ は“x は線である”，$x \epsilon y$ は“点 x が線 y の上にある”を意味している．

(1)　$\forall x\,(P(x) \leftrightarrow \neg L(x))$

(2)　$\forall x\,\forall y\,(x \epsilon y \to P(x) \wedge L(y))$

(3)　$\forall x\,\forall y\,(P(x) \wedge P(y) \wedge x \neq y \to \exists ! z(x \epsilon z \wedge y \epsilon z))$

(4)　$\forall x\,\forall y\,(L(x) \wedge L(y) \wedge x \neq y \to \exists ! z(z \epsilon x \wedge z \epsilon y))$

(5)　$\exists x_1\,\exists x_2\,\exists x_3\,\exists x_4\,(P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge P(x_3) \wedge P(x_4) \wedge x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge x_1 \neq x_4 \wedge x_2 \neq x_3 \wedge x_2 \neq x_4 \wedge x_3 \neq x_4 \wedge \neg c(x_1, x_2, x_3) \wedge \neg c(x_1, x_2, x_4) \wedge \neg c(x_1, x_3, x_4) \wedge \neg c(x_2, x_3, x_4))$

ここで，$c(x, y, z) \equiv \exists w(x \epsilon w \wedge y \epsilon w \wedge z \epsilon w)$．

この体系Bが相対原理を成り立たせることは比較的容易にわかる．しかし，体系BではPapposの定理は証明できない．この定理まで含む最も自然な公理系は，結局この定理を公理とするものになるようである(文献 [Hey] を参照)．

多領域論理を扱う際，表記の簡便さのために，異なる領域を動く変数には異なる文字種を用いることで，領域を区別する述語を除くことも多い．例えば，幾何の場

合，点の変数は小文字，線は大文字，面はギリシャ文字などと使い分けることで，$P(x), L(x), F(x)$ などの述語を使わずに済む．第 8 章で扱う 2 階算術は，自然数と自然数の集合という 2 種類の対象をもつ(2 領域の)体系であるが，自然数の変数には小文字，集合の変数には大文字を使うことで，それぞれの領域を区別する．

4

モデルの理論

第1章では，構造のクラスが等式理論で公理化されるための必要十分条件を与えた(Birkhoff の等式クラス定理)．本章では，述語論理におけるいろいろな形の公理系(例．ホーン理論)とそのモデルのクラスの特徴を調べる．また，モデル構成の基本テクニックである超積とその応用としての超準解析についても述べる．

4.1 初等的部分構造

本節では，複数の構造の間に成り立つ種々の関係について調べるが，その代表は「初等的部分構造」である．「初等的(elementary)」は，Tarski を祖とするバークレイ学派の用語で，述語論理(第1階論理)とほぼ同義語に使われている．

以下，言語 $\mathcal{L}$ を1つ固定して，話を進める．特に明記しない限り，この言語における構造を考える．次の定義は，代数構造に対する同様の概念の自然な拡張である．

定義 4.1.1 $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ を $\mathcal{L}$-構造とする．射 $\phi : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ が以下の条件を満たすとき，ϕ を**準同型**(homomorphism)と呼び，$\phi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ で表す： すべての m 変数関数記号 f とすべての $a_0, \cdots, a_{m-1} \in |\mathfrak{A}|$ について，

$$\phi(f^{\mathfrak{A}}(a_0, \cdots, a_{m-1})) = f^{\mathfrak{B}}(\phi(a_0), \cdots, \phi(a_{m-1})),$$

かつすべての n 項関係記号 R とすべての $a_0, \cdots, a_{n-1} \in |\mathfrak{A}|$ について，

$$R^{\mathfrak{A}}(a_0, \cdots, a_{n-1}) \Rightarrow R^{\mathfrak{B}}(\phi(a_0), \cdots, \phi(a_{n-1})).$$

また，準同型 ϕ が単射(1対1)で，かつ次の条件を満たすとき，それを $\mathfrak{A}$ から $\mathfrak{B}$ への**埋め込み**(embedding)という： すべての n 項関係記号 R とすべての $a_0, \cdots, a_{n-1} \in |\mathfrak{A}|$ について，

$$R^{\mathfrak{A}}(a_0, \cdots, a_{n-1}) \Leftrightarrow R^{\mathfrak{B}}(\phi(a_0), \cdots, \phi(a_{n-1})).$$

さらに，埋め込み $\phi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ が全射($|\mathfrak{B}|$ の上への関数)になるとき，それを**同型**(isomorphism)と呼ぶ．このとき，$\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}$ が**同型である**(isomorphic)ともいい，

$$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$$

と表す．

$\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A)$ に含まれる原子文と原子文の否定を集めた集合を $\mathfrak{A}$ のダイヤグラ

ム Diag($\mathfrak{A}$) と定義した．これを使って，次のことがいえる．

補題 4.1.2 $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ を $\mathcal{L}$-構造とする．射 $\phi: |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ が埋め込みであるための必要十分条件は，$\mathfrak{B}_{\phi(A)}$ が Diag($\mathfrak{A}$) のモデルになることである．

問題 1 上の補題を証明せよ．

定義 4.1.3 構造 $\mathfrak{A}$ が構造 $\mathfrak{B}$ の**部分構造**(substructure)であるとは，$|\mathfrak{A}| \subseteq |\mathfrak{B}|$ で，かつ恒等関数 $\mathrm{id}_{|\mathfrak{A}|}: |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ が埋め込みになるとき，つまりすべての関数記号 f と関係記号 R の構造 $\mathfrak{A}$ における解釈がそれぞれの記号の $\mathfrak{B}$ における解釈を $|\mathfrak{A}|$ に制限したものになるときをいう．このとき，

$$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$$

と書く．

例 1 $(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1, <) \subseteq (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$.

準同型 $\phi: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ に対して，その像 $\phi(|\mathfrak{A}|)$ を領域とする $\mathfrak{B}$ の部分代数を $\phi(\mathfrak{A})$ と書き，**準同型像**(homomorphic image)と呼ぶ．埋め込み $\phi: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ に対しては，$\phi(\mathfrak{A})$ と $\mathfrak{A}$ が同型になる．

以上は一般的な数学用語だが，これからこの分野特有の用語を定義していく．

定義 4.1.4 2つの $\mathcal{L}$-構造 $\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}$ が**初等的同値**(elementary equivalent)であるとは，両者が同じ $\mathcal{L}$-文を成り立たせること，すなわち $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) = \mathrm{Th}(\mathfrak{B})$ となることをいう．このとき，

$$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$$

と書く．

次の主張は殆ど自明であろう．厳密には論理式の構成に関する帰納法で証明するが，演習問題としよう．

補題 4.1.5　同型な2つの構造は，初等的同値である．すなわち，$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

定義 4.1.6　構造 $\mathfrak{A}$ が構造 $\mathfrak{B}$ の**初等的部分構造**(elementary substructure) であるとは，構造 $\mathfrak{A}$ が構造 $\mathfrak{B}$ の部分構造であって，両者が同じ $\mathcal{L}_A$-文を成り立たせること，すなわち $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A) = \mathrm{Th}(\mathfrak{B}_A)$ となることをいう．このとき，

$$\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$$

と書く．

初等的部分構造であるという性質は初等的同値性よりも強い．つまり，$\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ である．また，$\prec$ は推移的関係である．

例 2　$\mathfrak{N}_< = (\mathbf{N}, <)$，$\mathfrak{N}_<^+ = (\mathbf{N} - \{0\}, <)$ とおく．このとき

$$\mathfrak{N}_< \cong \mathfrak{N}_<^+, \quad \mathfrak{N}_< \equiv \mathfrak{N}_<^+, \quad \mathfrak{N}_<^+ \subseteq \mathfrak{N}_<.$$

しかし，

$$\mathfrak{N}_<^+ \not\prec \mathfrak{N}_<.$$

問題 2　$\mathfrak{Q}_< = (\mathbb{Q}, <)$，$\mathfrak{R}_< = (\mathbb{R}, <)$ に対して，関係 $\cong, \subseteq, \equiv, \prec$ のどれが成り立つか？

問題 3　有限構造 $\mathfrak{A}$ (つまり $|\mathfrak{A}|$ が有限集合) と構造 $\mathfrak{B}$ が $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ の関係を満たしているとき，$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ となることを示せ．

定理 4.1.7 (**Tarski-Vaught の判定法**(Tarski-Vaught's criterion))　$\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ であるための必要十分条件は，$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ であって，かつ任意の $m+1$ 変数論理式 $\varphi(x, y_1, \cdots, y_m)$ と任意の $a_1, \cdots, a_m \in A$ について，$\mathfrak{B}_A \models \exists x\, \varphi(x, a_1, \cdots, a_m)$ ならば $a \in |\mathfrak{A}|$ が存在して $\mathfrak{B}_A \models \varphi(a, a_1, \cdots, a_m)$ となることである．

証明　必要性は明らかである．十分性を示すには，任意の論理式 $\varphi(x_1,$

$\cdots, x_n)$ と，任意の $a_1, \cdots, a_n \in A$ について，

$$\mathfrak{A}_A \models \varphi(a_1, \cdots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B}_A \models \varphi(a_1, \cdots, a_n)$$

となることを φ の構成に関する帰納法で証明する．φ が原子式の場合は，$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ よりいえる．帰納法のステップで本質的な場合は $\varphi = \exists x \psi$ の形のときで，特に $\Leftarrow$ は定理の条件から直ちに得られる．□

問題 4　Tarski-Vaught の判定法を用いて，次の (1), (2) を証明せよ．

(1)　言語 $\mathcal{L}$ の理論 T について，以下は同値である．

(i)　言語 $\mathcal{L}$ のどの 1 変数論理式 $\varphi(x)$ に対しても，変数を含まない項の列 $t_1, \cdots, t_n$ が存在して，

$$T \vdash \exists x \varphi(x) \to \varphi(t_1) \vee \cdots \vee \varphi(t_n)$$

となる(弱ヘンキン性)．

(ii)　T のどのモデル $\mathfrak{A}$ に対しても，その最小の部分構造は初等的部分構造になる．

(2)　言語 $\mathcal{L}$ の理論 T について，以下は同値である．

(i)　言語 $\mathcal{L}$ のどの $m+1$ 変数論理式 $\varphi(x, y_1, \cdots, y_m)$ に対しても，m 変数の項の列 $t_1(y_1, \cdots, y_m)$, $\cdots$, $t_n(y_1, \cdots, y_m)$ が存在して，

$$T \vdash \exists x \varphi(x, y_1, \cdots, y_m) \to \varphi(t_1(y_1, \cdots, y_m), y_1, \cdots, y_m) \vee \cdots \\ \vee \varphi(t_n(y_1, \cdots, y_m), y_1, \cdots, y_m)$$

となる(弱スコーレム性)．

(ii)　T のどのモデル $\mathfrak{A}$ に対しても，任意の部分構造は初等的部分構造になる．

定義 4.1.8　構造たちの可算上昇列

$$\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{A}_i \subseteq \cdots \quad (i < \omega)$$

を構造の**鎖**(chain)と呼ぶ．そして，その極限として自然に定義される構造 $\mathfrak{A} = \bigcup_{i<\omega} \mathfrak{A}_i$ を鎖の**和**(union)と呼ぶ．

各 $i < \omega$ に対して，$\mathfrak{A}_i$ が $\mathfrak{A}$ の部分構造になることは明らかである．

定義 4.1.9　構造たちの可算上昇列

$$\mathfrak{A}_0 \prec \mathfrak{A}_1 \prec \cdots \prec \mathfrak{A}_i \prec \cdots \quad (i < \omega)$$

を構造の**初等鎖**(elementary chain)と呼ぶ．そして，構造 $\mathfrak{A} = \bigcup_{i<\omega} \mathfrak{A}_i$ を初等鎖の**和**(union)と呼ぶ．

定理 4.1.10（**初等鎖定理**）　任意の初等鎖 $\mathfrak{A}_0 \prec \mathfrak{A}_1 \prec \cdots$ に対し，その和を $\mathfrak{A}$ とおくと，各 i について $\mathfrak{A}_i \prec \mathfrak{A}$．

証明　この証明は Tarski-Vaught の判定法のアイデアに基づくが，直接的な応用にはなっていない．まず，$\mathfrak{A}$ を初等鎖 $\mathfrak{A}_0 \prec \mathfrak{A}_1 \prec \cdots$ の和とする．以下では，論理式 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ の構成に関する帰納法によって，すべての i について，任意の $a_1, \cdots, a_n \in A_i$ に対して，

$$\mathfrak{A}_{iA_i} \models \varphi(a_1, \cdots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{A}_{A_i} \models \varphi(a_1, \cdots, a_n)$$

を証明する．（i を固定してから帰納法を使うとうまくいかない．）

φ が原子式のときは明らかである．帰納法のステップで本質的なのは，$\varphi = \exists x \psi$ の形のときである．ここで，i を任意に固定する．$\Rightarrow$ は帰納法の仮定から直ちに導ける．$\Leftarrow$ を示すために，$a_1, \cdots, a_m \in A_i$ として，$\mathfrak{A}_{A_i} \models \exists x\, \varphi(x, a_1, \cdots, a_m)$ を仮定しよう．すると，$\mathfrak{A}_A \models \varphi(a, a_1, \cdots, a_m)$ を成り立たせる $a \in A$ がある．十分大きな $j \geq i$ をとれば，$a, a_1, \cdots, a_m \in A_j$ となるから，帰納法の仮定より $\mathfrak{A}_j \models \varphi(a, a_1, \cdots, a_m)$ である．したがって，$\mathfrak{A}_j \models \exists x\, \varphi(x, a_1, \cdots, a_m)$．$\prec$ の推移性から $\mathfrak{A}_i \prec \mathfrak{A}_j$ となるので，$\mathfrak{A}_{iA_i} \models \exists x\, \varphi(x, a_1, \cdots, a_m)$ も得られ，$\Leftarrow$ が示された．　□

上の定理を，任意の順序数 α に対する超限列 $\mathfrak{A}_0 \prec \mathfrak{A}_1 \prec \cdots \prec \mathfrak{A}_\beta \prec \cdots$ $(\beta < \alpha)$ に一般化するのは容易である．

4.2 ∀ 理論と ∀∃ 理論

数学の公理系として最もよく用いられる形態が ∀ 理論と ∀∃ 理論である．本節では，Birkhoff の等式クラス定理の延長として，これらの理論に対するモデルのクラスの特徴を調べる．

定義 4.2.1 T を言語 $\mathcal{L}$ の理論とする．T のモデル全体を $\mathrm{Mod}(T)$ で表す．すなわち，

$$\mathrm{Mod}(T) = \{\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \models T\}.$$

Birkhoff の等式クラス定理(1.3 節の補足 2 にあるその拡張)をこの章の言葉で表現し直せば次のようになる．

定理 4.2.2 $\mathcal{K}$ を $\mathcal{L}$-構造のクラスとすると，次の 2 条件は同値である．

（1） $\mathcal{K}$ は直積，部分構造，準同型像に関して閉じている．

（2） 原子式(の全称閉包)だけの理論 T が存在して，$\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(T)$．

ここで，構造の直積は次のように定義される．

定義 4.2.3 各 $\mathfrak{A}_i$ $(i \in I)$ が $\mathcal{L}$-構造のとき，構造 $\prod \mathfrak{A}_i = (\prod A_i, f^{\prod \mathfrak{A}_i}, \cdots, R^{\prod \mathfrak{A}_i}, \cdots)$ をそれらの**直積**(direct product)という．ここで

$$f^{\prod \mathfrak{A}_i}(a_1, \cdots, a_n) = \lambda i.\, f^{\mathfrak{A}_i}(a_1(i), \cdots, a_n(i)),$$

$$R^{\prod \mathfrak{A}_i}(a_1, \cdots, a_n) \Leftrightarrow \forall i \in I \;\; R^{\mathfrak{A}_i}(a_1(i), \cdots, a_n(i)).$$

但し，$\lambda i.\, g(i)$ は i に $g(i)$ を対応させる関数を表す．

上の定理から自然に生じる疑問は，$\mathcal{K}$ が直積で閉じている場合，部分構造で閉じている場合，準同型像で閉じている場合を別々に考えたら，それぞれどのような形の公理系が対応するかである．直積については，それを“約積”に拡張して次節で扱い，部分構造については，本節でこれから述べる．準同型像の話は第 6 章(定理 6.3.15)で扱うが，以下に結果だけ述べる．

定理 4.2.4 (Lyndon)　次の2条件は同値である．

(1)　$\mathrm{Mod}(T)$ は準同型像に関して閉じている．

(2)　否定記号 $\neg$ なしの理論 T' が存在して，$\mathrm{Mod}(T) = \mathrm{Mod}(T')$．

ここで，否定記号 $\neg$ なしの理論とは，すべての公理が原子論理式から $\wedge$, $\vee, \forall, \exists$ だけで構成されているものをいう．

定義 4.2.5　φ を開論理式(量化記号を含まない論理式)とするとき，$\forall x_1 \cdots \forall x_m \varphi$ を $\forall$ **論理式**，$\forall x_1 \cdots \forall x_n \exists y_1 \cdots \exists y_m \varphi$ を $\forall\exists$ **論理式**という．そして，$\forall$ 文からなる集合を $\forall$ **理論**もしくは**全称理論**(universal theory)，$\forall\exists$ 文からなる集合を $\forall\exists$ **理論**もしくは**帰納的理論**(inductive theory)という．

前章の最後に示したように，すべての理論は言語の拡張によって $\forall$ 理論にすることができる．例えば，群論は，言語 $(\cdot)$ においては $\forall\exists$ 理論だが，言語 $(\cdot, e, ^{-1})$ では $\forall$ 理論になる．同様に，環論や整域の理論(= 可換環論 + $\forall x \forall y\ (x \cdot y = 0 \to x = 0 \vee y = 0)$)も十分な言語の下で $\forall$ 理論として扱える．体の理論は通常 $\forall\exists$ 理論であるが，それを $\forall$ 理論として扱うには除法 x/y を全域関数として導入する必要がある．

定理 4.2.6 (Łoś–Tarski)　次の2条件は同値である．

(1)　$\mathrm{Mod}(T)$ は部分構造に関して閉じている．

(2)　$\forall$ 理論 T' が存在して，$\mathrm{Mod}(T) = \mathrm{Mod}(T')$．

証明　(2) $\Rightarrow$ (1) を示す．T を $\forall$ 理論とし，$\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}(T)$ とする．$\forall x_1 \cdots \forall x_n \varphi(x_1, \cdots, x_n)$ を T の任意の公理とする．$\mathfrak{A} \models \forall x_1 \cdots \forall x_n \varphi(x_1, \cdots, x_n)$ だから，任意の $b_1, \cdots, b_n \in B \subseteq A$ に対しても，$\mathfrak{A}_B \models \varphi(b_1, \cdots, b_n)$ である．φ は開論理式であり，$\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ から $\mathfrak{B}_B \models \varphi(b_1, \cdots, b_n)$ である．よって，$\mathfrak{B} \models \forall x_1 \cdots \forall x_n \varphi(x_1, \cdots, x_n)$ となり，$\mathfrak{B} \in \mathrm{Mod}(T)$ である．

(1) ⇒ (2) を示すため，(1) を仮定し，$T' = \{\sigma : \sigma$ は ∀ 文で，かつ $T \vdash \sigma\}$ とおく．$\mathrm{Mod}(T) \subseteq \mathrm{Mod}(T')$ は明らかだから，逆をいう．$\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}(T')$ とし，$D = \mathrm{Diag}(\mathfrak{A})$ とおく．$D \cup T$ がモデル $\mathfrak{B}_A$ をもてば，それは明らかに $\mathfrak{A}$ と同型な部分構造を含むので，仮定より $\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}(T)$ である．あとは，$D \cup T$ がモデルをもつことを示せばよい．

もし $D \cup T$ がモデルをもたなければ，D の有限部分集合 $\{\varphi_1(a_1, \cdots, a_n), \cdots, \varphi_k(a_1, \cdots, a_n)\}$ が存在して，$\{\varphi_1(a_1, \cdots, a_n), \cdots, \varphi_k(a_1, \cdots, a_n)\} \cup T$ もモデルをもたない．いま，$\varphi(a_1, \cdots, a_n) = \varphi_1(a_1, \cdots, a_n) \wedge \cdots \wedge \varphi_k(a_1, \cdots, a_n)$ とおけば，完全性定理により言語 $\mathcal{L} \cup \{a_1, \cdots, a_n\}$ において $T \vdash \neg\varphi(a_1, \cdots, a_n)$ である．T は定数 $a_1, \cdots, a_n$ を含まないのでこれらを変数に置き換えれば，$T \vdash \neg\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ すなわち $T \vdash \forall x_1 \cdots \forall x_n \neg\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ を得る．よって，$\forall x_1 \cdots \forall x_n \neg\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ は T' に属するから，$\mathfrak{A} \models \forall x_1 \cdots \forall x_n \neg\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ である．したがって，$\mathfrak{A}_A \models \neg\varphi(a_1, \cdots, a_n)$ であり，どれかの $i \leq k$ については $\mathfrak{A}_A \models \neg\varphi_i(a_1, \cdots, a_n)$ になるので，$\varphi_i(a_1, \cdots, a_n)$ が D に属することに反する．□

問題 5　上の定理を次のように言い換えることはできない理由を考えよ．$\mathcal{K}$ を $\mathcal{L}$-構造のクラスとすると，次の 2 つは同値である：

（1）$\mathcal{K}$ は部分構造に関して閉じている．

（2）∀ 理論 T が存在して，$\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(T)$.

定理 4.2.7 (Chang-Łoś-Suszko)　次の 2 条件は同値である．

（1）$\mathrm{Mod}(T)$ は鎖の和に関して閉じている．すなわち，$\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}_1 \subseteq \cdots$ を T のモデルの鎖とすれば，その和も T のモデルになる．

（2）∀∃ 理論 T' が存在して，$\mathrm{Mod}(T') = \mathrm{Mod}(T)$ である．

証明　(2) ⇒ (1) をいう．$\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}_1 \subseteq \cdots$ を ∀∃ 理論 T' のモデルの鎖として，その和 $\mathfrak{A} = \bigcup_{i<\omega} \mathfrak{A}_i$ も T' のモデルになることを示す．$\forall x_1 \cdots \forall x_n \exists y_1 \cdots \exists y_m \varphi(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m)$ を T' に属する任意の ∀∃ 文とする．

任意の $a_1, \cdots, a_n \in A$ をとる．このとき，ある k が存在して，$\{a_1, \cdots, a_n\} \subseteq A_k$ である．$\mathfrak{A}_{kA_k} \models \exists y_1 \cdots \exists y_m \varphi(a_1, \cdots, a_n, y_1, \cdots, y_m)$ より，ある $b_1, \cdots, b_m \in A_k$ に対して，$\mathfrak{A}_k \models \varphi(a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_m)$ である．φ は開論理式で，$\mathfrak{A}_k \subseteq \mathfrak{A}$ だから，$\mathfrak{A}_A \models \varphi(a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_m)$ である．よって，$\mathfrak{A}_A \models \exists y_1 \cdots \exists y_m \varphi(a_1, \cdots, a_n, y_1, \cdots, y_m)$ であり，$a_1, \cdots, a_n \in |\mathfrak{A}|$ は任意にとったので，$\mathfrak{A} \models \forall x_1 \cdots \forall x_n \exists y_1 \cdots \exists y_m \varphi(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m)$ となる．

(1) ⇒ (2) をいう．$T' = \{\sigma : \sigma$ は $\forall\exists$ 文で $T \vdash \sigma\}$ とする．$\mathrm{Mod}(T) \subseteq \mathrm{Mod}(T')$ は明らか．逆を示すために，$\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}(T')$ とする．$D_\forall$ を $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A)$ に含まれる $\forall$ 文の集合とする．上の定理(Łoś-Tarski)の証明と殆ど同様にして，コンパクト性定理より，$D_\forall \cup T$ がモデル $\mathfrak{B}_A$ をもつことがいえる．すると，$\mathfrak{B}_A$ の縮約 $\mathfrak{B}$ も T のモデルであり，$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ となる．

さらに，$D = \mathrm{Diag}(\mathfrak{B})$ とおくと，コンパクト性定理から $D \cup \mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A)$ もモデルをもつことがわかる．簡単に証明する．$\varphi(b_1, \cdots, b_n)$ を D の有限個の論理式を $\vee$ でつないだもので，$b_1, \cdots, b_n$ は $B - A$ の定数とする．いま，$\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A) \vdash \neg\varphi(b_1, \cdots, b_n)$ と仮定すれば，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A) &\vdash \forall x_1 \cdots \forall x_n \neg\varphi(x_1, \cdots, x_n) \\
&\Rightarrow \forall x_1 \cdots \forall x_n \neg\varphi(x_1, \cdots, x_n) \in D_\forall \\
&\Rightarrow \mathfrak{B}_A \models \forall x_1 \cdots \forall x_n \neg\varphi(x_1, \cdots, x_n) \\
&\Rightarrow \mathfrak{B}_A \models \neg\varphi(b_1, \cdots, b_n) \\
&\Rightarrow \text{矛盾}.
\end{aligned}
$$

$\mathfrak{A}_A'$ を $D \cup \mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A)$ のモデルとすれば，$\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}'$ かつ $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{A}'$ となる．

もう一度整理すると，$\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}(T')$ に対して T のモデル $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}$ があり，さらに $\mathfrak{A}' \supseteq \mathfrak{B}$ で $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{A}'$ となるものが存在する．$\mathfrak{A}' \in \mathrm{Mod}(T')$ であるから，同様の議論で T のモデル $\mathfrak{B}' \supseteq \mathfrak{A}'$ があり，さらに $\mathfrak{A}'' \supseteq \mathfrak{B}'$ で $\mathfrak{A}' \prec \mathfrak{A}''$ となるものがある．この作業を繰り返すことにより T' のモデルの初等鎖

$$\mathfrak{A} \prec \mathfrak{A}' \prec \mathfrak{A}'' \prec \cdots$$

と T のモデルの鎖

$$\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}' \subseteq \mathfrak{B}'' \subseteq \cdots$$

が得られ，さらに $\mathfrak{A}^{(n)} \subseteq \mathfrak{B}^{(n)} \subseteq \mathfrak{A}^{(n+1)}$ となる．したがって，2つの鎖の和は一致しており，それを $\mathfrak{A}_\infty$ とおく．すると，一方で初等鎖定理より $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{A}_\infty$ であり，他方で定理の条件 (1) を用いて $\mathfrak{A}_\infty$ は T のモデルになる．よって，$\mathfrak{A}$ も T のモデルであり，$\mathrm{Mod}(T') \subseteq \mathrm{Mod}(T)$ が証明された． □

定義 4.2.8 理論 T が**モデル完全**(model complete)であるとは，T の任意のモデル $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ について

$$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$$

となることをいう．

モデル完全の代表的な理論は，実閉体，実閉順序体，代数的閉体などである．これらについては，第7章で述べる．

補題 4.2.9 モデル完全な理論は，$\forall\exists$ 理論である．

証明 モデル完全な理論 T では，モデルの鎖は初等鎖になっているから，初等鎖定理よりその和も T のモデルになる．上で示した定理より，この理論は $\forall\exists$ 理論である． □

問題 6 モデル完全な理論では，すべての論理式に対して，それと同値な $\forall$ 論理式が存在することを示せ．（ヒント．Łoś-Tarski の定理の (1) ⇒ (2) の証明を参考にせよ．）

4.3 ホーン理論と約積

ホーン論理式は 1950 年代初めに A. Horn が，本節で述べるような数学的な興味(直積との関係)から導入したものである．しかし，70 年代に R.

Kowalski がその形の論理式に対する効率の良い証明手続きを発見し，そのアイデアに基づき論理型プログラミングの理論と応用が急速に発展した．そして，ホーン論理式といえば人工知能の論理として広く知られるようになった(文献 [Kow] や [EFT])．

これまでと同様，言語 $\mathcal{L}$ を1つ固定して，話を進める．

定義 4.3.1 各 θ_i $(i < n)$ を原子論理式として，$\theta_0 \vee \neg\theta_1 \vee \cdots \vee \neg\theta_n$ 並びに $\neg\theta_1 \vee \cdots \vee \neg\theta_n$ を**基本ホーン論理式**(basic Horn formula)と呼ぶ．基本ホーン論理式から $\wedge, \forall, \exists$ のみで作られる論理式を**ホーン論理式**(Horn formula)，ホーン文の集合を**ホーン理論**(Horn theory)と呼ぶ．

基本ホーン理論式は，$\theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_n \to \theta_0$ または $\theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_n \to \perp$ (矛盾) とも表すことができ，応用上はその方が使い易い．

例 3 正則環の理論(環論に公理 $\forall x\, \exists y\, (xyx = x)$ を付け加えたもの)はホーン理論である．整域の理論(可換環論 $+$ $\forall x\, \forall y\, (x \cdot y = 0 \to x = 0 \vee y = 0)$)や体の理論(可換環論 $+$ $\forall x\, \exists y\, (x \neq 0 \to xy = 1)$)はホーン理論ではない．

ホーン理論のモデルは，“約積”と呼ばれる直積の一般化について閉じている．それを導入するために，いま二，三の定義が必要である．

定義 4.3.2 I を空でない集合とする．$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(I)$ は，以下の性質を満たすとき I 上の**フィルター**(filter)であるという．

(1) $\emptyset \notin \mathcal{F},\ I \in \mathcal{F}$

(2) $X \in \mathcal{F},\ X \subseteq Y \subseteq I \Rightarrow Y \in \mathcal{F}$

(3) $X, Y \in \mathcal{F} \to X \cap Y \in \mathcal{F}$

直観的には，I の部分集合で，ある基準より大きなものだけを集めたものがフィルターである．(1) の条件によって，基準が緩すぎる $\mathcal{P}(I)$ や逆に厳しすぎる $\emptyset$ はフィルターから除外する．

問題 7 I を無限集合として，以下を示せ．

（1） I の有限部分集合全体はフィルターでない．

（2） I の無限部分集合全体はフィルターでない．

（3） I の部分集合で，その補集合が有限であるものの全体はフィルターである．(このフィルターを**フレシェ・フィルター**(Fréchet filter)という．)

（4） 各 $i \in I$ に対し，I の部分集合で，i を含むものの全体 $\{X \subseteq I : i \in X\}$ はフィルターである．(このフィルターを**単項フィルター**(principal filter)という．)

補題 4.3.3 $S \subset \mathcal{P}(I)$ が次の性質(**有限交叉性**(finite intersection property))をもつとき，S を含むフィルター $\mathcal{F}$ が存在する：

S の任意の有限部分集合 $\{J_1, \cdots, J_n\}$ に対して $J_1 \cap \cdots \cap J_n \neq \emptyset$.

証明 $\mathcal{F} = \{X \subseteq I : ある \{J_1, \cdots, J_n\} \subset S に対して J_1 \cap \cdots \cap J_n \subset X\}$ とおけばよい． □

定義 4.3.4 $\mathfrak{A}_i = (A_i, f^{\mathfrak{A}_i}, \cdots, R^{\mathfrak{A}_i}, \cdots)$ $(i \in I)$ を $\mathcal{L}$-構造，$\mathcal{F}$ を I のフィルターとする．このとき，$\prod A_i$ 上の 2 項関係 $\approx_{\mathcal{F}}$ を次のように定義する．

$$a \approx_{\mathcal{F}} b \Leftrightarrow \{i \in I : a(i) = b(i)\} \in \mathcal{F}.$$

これは，a と b とが($\mathcal{F}$ の基準で)十分多くの i について一致する，つまり両者が十分近いことを表している．

補題 4.3.5 $\approx_{\mathcal{F}}$ は同値関係である．

証明 反射律と対称律は，定義から明らかである．推移律を示すために，$a \approx_{\mathcal{F}} b$, $b \approx_{\mathcal{F}} c$ を仮定する．定義から，

$$\{i \in I : a(i) = b(i)\} \in \mathcal{F} \text{ かつ } \{i \in I : b(i) = c(i)\} \in \mathcal{F}.$$

一方，

$$\{i \in I : a(i) = c(i)\} \supseteq \{i \in I : a(i) = b(i)\} \cap \{i \in I : b(i) = c(i)\}$$

だから，フィルターの条件 (2), (3) より

$$\{i \in I : a(i) = c(i)\} \in \mathcal{F}.$$

よって，$a \approx_{\mathcal{F}} c$. □

いま，$a_1, \cdots, a_n \in \prod A_i$ について

$$\|\varphi(a_1, \cdots, a_n)\| = \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \varphi(a_1(i), \cdots, a_n(i))\}$$

とおく．(注．上の $\mathfrak{A}_i$ は正確には $\mathfrak{A}_{iA_i}$ のことである．文脈から明らかな場合，$\mathfrak{A}_A$ を単に $\mathfrak{A}$ と記す.)

補題 4.3.6 $a_1 \approx_{\mathcal{F}} b_1, \cdots, a_n \approx_{\mathcal{F}} b_n$ のとき，

$$\|f(a_1, \cdots, a_n) = f(b_1, \cdots, b_n)\| \in \mathcal{F},$$

$$\|R(a_1, \cdots, a_n)\| \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \|R(b_1, \cdots, b_n)\| \in \mathcal{F}.$$

証明 次のことと，フィルターの条件 (2), (3) によって容易に導ける．

$$\bigcap_{k \leq n} \{i \in I : a_k(i) = b_k(i)\} \subseteq \|f(a_1, \cdots, a_n) = f(b_1, \cdots, b_n)\|,$$

$$\bigcap_{k \leq n} \{i \in I : a_k(i) = b_k(i)\} \cap \|R(a_1, \cdots, a_n)\| \subseteq \|R(b_1, \cdots, b_n)\|.$$

□

したがって，$\approx_{\mathcal{F}}$ は $\prod A_i$ 上の合同関係になり，代数構造のときと同じように，商構造を定義することができる．すなわち，その同値類全体を $\prod A_i/\approx_{\mathcal{F}}$ あるいは $\prod A_i/\mathcal{F}$ とすると，関数 f の値や関係 R の真偽は代表元の選び方によらずその上で一意に定まる．

定義 4.3.7 $\mathfrak{A}_i = (A_i, f^{\mathfrak{A}_i}, \cdots, R^{\mathfrak{A}_i}, \cdots)$ $(i \in I)$ を $\mathcal{L}$-構造とし，$\mathcal{F}$ を I のフィルターとする．このとき，直積 $\prod A_i$ を合同関係 $\approx_{\mathcal{F}}$ で割って得られる $\mathcal{L}$-構造

$$(\prod A_i/\mathcal{F}, f^{\prod \mathfrak{A}_i/\mathcal{F}}, \cdots, R^{\prod \mathfrak{A}_i/\mathcal{F}}, \cdots)$$

を $\mathfrak{A}_i$ たちの**約積**(reduced product) と呼び，

$$\prod \mathfrak{A}_i / \mathcal{F}$$

で表す.

空でない集合 I に対し, $\mathcal{F} = \{I\}$ はフィルターであり, $\prod \mathfrak{A}_i/\mathcal{F} \cong \prod \mathfrak{A}_i$ となる. つまり, 直積も約積の1つである. また, 単項フィルター $\mathcal{F} = \{X \subseteq I : k \in X\}$ に対しては, $\prod \mathfrak{A}_i/\mathcal{F} \cong \mathfrak{A}_k$ となる.

補題 4.3.8 φ を原子論理式から $\wedge$ と $\exists$ のみで得られる論理式とすると, $a_1, \cdots, a_n \in \prod A_i$ について,

$$\prod \mathfrak{A}_i/\mathcal{F} \models \varphi([a_1], \cdots, [a_n]) \Leftrightarrow \|\varphi(a_1, \cdots, a_n)\| \in \mathcal{F}.$$

証明 論理式の構成に関する帰納法によって証明する. φ が原子論理式の場合, 定義より明らか. φ が $\psi_1 \wedge \psi_2$ の形であれば, 帰納法の仮定とフィルターが $\cap$ に関して閉じていることから容易にいえる. φ が $\exists x \, \psi(x)$ の場合を示す. φ はパラメータ $a_1, \cdots, a_n \in \prod A_i$ を含んでよいが, 簡単のため省略して表す.

$$\begin{aligned}
\prod \mathfrak{A}_i/\mathcal{F} \models \exists x \, \psi(x) &\Leftrightarrow \text{ある } a \in \prod \mathfrak{A}_i \text{ に対し } \prod \mathfrak{A}_i/\mathcal{F} \models \psi([a]) \\
&\Leftrightarrow \text{ある } a \in \prod \mathfrak{A}_i \text{ に対し } \|\psi(a)\| \in \mathcal{F} \\
&\qquad\qquad (\because \text{ 帰納法の仮定}) \\
&\Leftrightarrow \|\exists x \, \psi(x)\| \in \mathcal{F} \\
&\qquad\qquad (\because \|\psi(a)\| \subseteq \|\exists x \, \psi(x)\|).
\end{aligned}$$

逆に $\|\exists x \, \psi(x)\| \in \mathcal{F}$ とすれば, 選択公理によって, 各 $i \in \|\exists x \, \psi(x)\|$ に対して $\mathfrak{A}_i \models \psi(a(i))$ となる $a \in \prod A_i$ を作れば, $\|\psi(a)\| \in \mathcal{F}$ となる. すると, 帰納法の仮定より $\prod \mathfrak{A}_i/\mathcal{F} \models \psi([a])$. したがって, $\prod \mathfrak{A}_i/\mathcal{F} \models \exists x \, \psi(x)$ となる. □

補題 4.3.9 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ を基本ホーン論理式とすると, $a_1, \cdots, a_n \in \prod A_i$ について,

$$\|\varphi(a_1, \cdots, a_n)\| \in \mathcal{F} \Rightarrow \prod \mathfrak{A}_i/\mathcal{F} \models \varphi([a_1], \cdots, [a_n]).$$

証明　簡単のため，論理式のパラメータ $a_1, \cdots, a_n \in \prod A_i$ を省略する．φ を基本ホーン文 $(\theta_0 \vee) \neg \theta_1 \vee \cdots \vee \neg \theta_n$ とする．ここで，$\theta_i\ (i < n)$ は原子文である．$\|\varphi\| \in \mathcal{F}$ かつ $\prod \mathfrak{A}_i/\mathcal{F} \not\models \varphi$ を仮定して矛盾を導く．まず，後者の仮定より，$\prod \mathfrak{A}_i/\mathcal{F} \models \theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_n$ だから，前の補題より $\|\theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_n\| \in \mathcal{F}$ がいえる．φ が θ_0 を含まない場合，$\emptyset = \|\varphi\| \cap \|\theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_n\| \in \mathcal{F}$ でフィルターの定義に反する．φ が θ_0 を含む場合，$\|\theta_0\| = \|\varphi\| \cap \|\theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_n\| \in \mathcal{F}$ だから，前の補題より $\prod \mathfrak{A}_i/\mathcal{F} \models \theta_0$ となり仮定 $\prod \mathfrak{A}_i/\mathcal{F} \not\models \varphi$ に反する．　□

補題 4.3.10　$\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ をホーン論理式とすると，$a_1, \cdots, a_n \in \prod A_i$ について，

$$\|\varphi(a_1, \cdots, a_n)\| \in \mathcal{F} \Rightarrow \prod \mathfrak{A}_i/\mathcal{F} \models \varphi([a_1], \cdots, [a_n]).$$

証明　ホーン論理式は，基本ホーン論理式から $\wedge, \forall, \exists$ で作られる論理式であり，その構成に関する帰納法で補題を証明する．基本ホーン論理式の場合は，上の補題からしたがう．ホーン論理式が $\wedge$ または $\exists$ で構成されるステップについては，補題 4.3.8 の証明と同様である．$\forall$ のステップについては，

$$\begin{aligned} \|\forall x\, \varphi(x)\| \in \mathcal{F} &\Rightarrow \forall a\, \|\varphi(a)\| \in \mathcal{F} \\ &\Rightarrow \forall a \prod \mathfrak{A}_i/\mathcal{F} \models \varphi([a]) \\ &\Leftrightarrow \prod \mathfrak{A}_i/\mathcal{F} \models \forall x\, \varphi(x) \end{aligned}$$

よりいえる．　□

この補題により，ホーン論理式が約積で保存されること，つまりあるホーン論理式のモデルたちの約積が再びもとのホーン論理式のモデルになることがわかる．したがって，ホーン理論のモデルのクラスは約積，特に直積でも閉じていることになる．そして，この逆も成り立つことが知られており，それを加えた形で定理を述べておく．

定理 4.3.11 (Keisler–Galvin)　次の 2 条件は同値である．

(1)　Mod(T) は約積に関して閉じている．

(2)　ホーン論理 T' が存在して，Mod(T) = Mod(T')．

(1) ⇒ (2) の証明は，文献 [ChK] の定理 6.2.5 および問題 6.2.5 を参照．

この定理の応用として，例えば正則環の約積が正則環であることがわかる．

もう一度直積の話に戻る．まず，直積で閉じていて，約積で閉じていないクラスがある．その例として，原子をもつブール代数を考える．ブール代数の理論は ∀ 理論で，原子 a をもつという主張は次の ∃∀ 文で表される．

$$\exists a\, \forall x\, (a \neq 0 \wedge (a \cdot x = x \to x = a \vee x = 0)).$$

そのようなブール代数の直積 $\prod \mathfrak{A}_i$ においては，ある i において原子 $a \in |\mathfrak{A}_i|$ を値とし，それ以外のところで 0 を値とする関数 f を考えると，それが $\prod \mathfrak{A}_i$ の原子になる．他方，約積に対しては，フレシェ・フィルター $\mathcal{F}$ をとって，$\prod \mathfrak{A}_i/\mathcal{F}$ を考える．もし，$\prod \mathfrak{A}_i/\mathcal{F}$ が原子 $[g]$ をもったとすると，それはゼロ $0^{\prod \mathfrak{A}_i/\mathcal{F}}$ ではないから，無限集合 $J \subseteq I$ に対して 0 以外の値をとる．J を 2 つの無限集合 J_1, J_2 に分割して，g の J_2 での値を 0 に置き換えた関数を h とすれば，$[g] \cdot [h] = [h]$, $[h] \neq [g]$, $[h] \neq 0$ となり，$[g]$ が原子であることに反する．

では，直積を保存するような文全体がどのようなものになるかというと，容易に記述できない．実際，それが計算不可能である (0 型言語にならない) という結果が Machover によって得られている．

文献によっては，基本ホーン論理式の前にいくつかの ∀ を付けた文 (我々の言葉では，∀ ホーン文) を単にホーン文と呼び，その集まりをホーン理論 (我々の言葉では，∀ ホーン理論) と呼ぶことがある．∀ ホーン理論は，等式理論のきれいな拡張になっており，次のような定理が導ける．基本的には Birkhoff の等式クラス定理と同様に証明できるが，詳細は読者に委ねる．

定理 4.3.12 $\mathcal{K}$ を $\mathcal{L}$-構造のクラスとすると，次の3条件は同値である．

（1） $\mathcal{K}$ は直積と部分構造と同型に関して閉じている．

（2） $\mathcal{K}$ は約積と部分構造と同型に関して閉じている．

（3） $\forall$ ホーン理論 T が存在して，$\mathrm{Mod}(T) = \mathcal{K}$.

4.4 超積

ある構造のクラスが述語論理で公理化できるための，つまり $\mathrm{Mod}(T)$ と表されるための必要十分条件を考えるのが本節の目的である．

定義 4.4.1 $\mathcal{L}$-構造のクラス $\mathcal{K}$ が**初等クラス**(elementary class)であるとは，$\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(T)$ となる文の集合 T が存在するときをいう．このとき，

$$\mathcal{K} \in \mathrm{EC}_{\Delta}$$

と書く．

初等クラスの特徴付けを行うための有用な道具が，約積の一種である“超積”である．それを定義するために，まず超フィルターを導入する．

定義 4.4.2 I 上のフィルター $\mathcal{F}$ が**超フィルター**(ultrafilter, maximal filter)であるとは，次の性質を満たすことである．

$$\forall X \subset I \ (X \in \mathcal{F} \vee I - X \in \mathcal{F}).$$

補題 4.4.3 どんなフィルター $\mathcal{F}$ も超フィルター $\mathcal{U}$ に拡大できる．

証明 与えられたフィルター $\mathcal{F}$ の拡大フィルター全体を考えると，これは鎖の和について閉じているから，Zorn の補題が使えて，極大なフィルター $\mathcal{U}$ の存在がいえる．これが求める超フィルターである． □

単項フィルターは超フィルターである．そうでない超フィルターを**非単項超フィルター**(nonprincipal ultrafilter)という．

補題 4.4.4 任意の無限集合 I の上に，非単項超フィルター $\mathcal{U}$ が存在する．

証明 I を無限集合として，$\mathcal{F}$ をその上のフレシェ・フィルター(I の部分集合で，その補集合が有限であるものの全体)とする．上の補題 4.4.3 によってこれを拡大して超フィルター $\mathcal{U}$ が得られる．これは非単項である．なぜなら，各 $i \in I$ に対し，$I-\{i\} \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$ だから，$\{i\} \notin \mathcal{U}$． □

定義 4.4.5 超フィルター $\mathcal{U}$ に対する約積 $\prod \mathfrak{A}_i/\mathcal{U}$ を**超積**(ultraproduct)と呼ぶ．

定理 4.4.6 (Łoś) $\mathcal{U}$ を超フィルターとする．任意の論理式 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ と $a_1, \cdots, a_n \in \prod A_i$ について，

$$\prod \mathfrak{A}_i/\mathcal{F} \models \varphi([a_1], \cdots, [a_n]) \Leftrightarrow \|\varphi(a_1, \cdots, a_n)\| \in \mathcal{F}.$$

証明 論理式の構成に関する帰納法によって証明する．原子論理式の場合，および論理式が $\wedge$ と $\exists$ で構成されるステップについては，約積に関する補題 4.3.8 の証明のままである．$\vee$ と $\forall$ は $\wedge, \exists$ と否定 $\neg$ によって表されるので，あとは否定 $\neg\varphi$ の場合を示せばよい．

$$\begin{aligned}\prod \mathfrak{A}_i/\mathcal{U} \models \neg\varphi &\Leftrightarrow \prod \mathfrak{A}_i/\mathcal{U} \not\models \varphi \\ &\Leftrightarrow \|\varphi\| \notin \mathcal{U} \quad (\because \text{帰納法の仮定}) \\ &\Leftrightarrow \|\neg\varphi\| \in \mathcal{U} \quad (\because \mathcal{U} \text{の極大性}).\end{aligned}$$

□

上の定理を使って，コンパクト性定理の別証明を与える．

系 4.4.7 (コンパクト性定理) 理論 T がモデルをもつための必要十分条件は，T の任意有限部分集合がモデルをもつことである．

証明 必要性は明らかなので，十分性を示す．理論 T の有限部分集合全

体を I とする．文 $\varphi \in T$ に対して $J_\varphi = \{i \in I : \varphi \in i\}$ とおくと，$\{J_\varphi : \varphi \in T\}$ は有限交叉性をもつ（$\because$ $\{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\} \in J_{\varphi_1} \cap \cdots \cap J_{\varphi_n}$）．したがって，補題4.3.3と補題4.4.3により，超フィルター $\mathcal{U} \supseteq \{J_\varphi : \varphi \in T\}$ が存在する．各 $i \in I$ に対するモデルを $\mathfrak{A}_i$ として，$\mathfrak{A} = \prod \mathfrak{A}_i/\mathcal{U}$ とおくとき，$\mathfrak{A}$ が T のモデルとなることを以下に示す．

まず，任意の $\varphi \in T$ をとる．$i \in J_\varphi \Rightarrow \varphi \in i \Rightarrow \mathfrak{A}_i \models \varphi$ より，$J_\varphi \subseteq \{i : \mathfrak{A}_i \models \varphi\}$ である．ここで，$J_\varphi \in \mathcal{U}$ だから，フィルターの条件から，$\|\varphi\| = \{i : \mathfrak{A}_i \models \varphi\} \in \mathcal{U}$．最後に，Łoś の定理によって，$\mathfrak{A} \models \varphi$ となる．

□

問題8　任意の体 $\mathcal{F}$ が代数的閉包 $\overline{\mathcal{F}}$ をもつことを超積を使って示せ．（ヒント．代数的閉体等の基本知識は，第7章を参照．$\mathcal{F}_P$ を多項式 P の分解体とし，各 $Q \in \mathcal{F}[X]$ に対して，$J_Q = \{P \in \mathcal{F}[X] : Q$ は $\mathcal{F}_P$ の上で1次式の積に分解できる$\}$ とおく．そして，$\{J_Q : Q \in \mathcal{F}[X]\}$ を含む超フィルターを $\mathcal{U}$ として，超積 $\prod \mathcal{F}_P/\mathcal{U}$ を考えよ．）

定理 4.4.8（Frayne-Morel-Scott）　構造のクラス $\mathcal{K}$ が初等クラス(EC_Δ)になるための必要十分条件は，それが初等的同値と超積に関して閉じていることである．

証明　必要性は明らかである．十分性を示すために，$\mathcal{K}$ が初等的同値と超積に関して閉じているとして，$T = \{\sigma : \forall \mathfrak{A} \in \mathcal{K}, \mathfrak{A} \models \sigma\}$ とおき，$\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(T)$ をいう．明らかに $\mathcal{K} \subseteq \mathrm{Mod}(T)$ だから，$\mathrm{Mod}(T) \subseteq \mathcal{K}$ をいえばよい．そこで，$\mathfrak{B} \in \mathrm{Mod}(T)$ をとり，I を $\mathrm{Th}(\mathfrak{B})$（$\mathfrak{B}$ で真となる文の集合）の有限部分集合全体とする．

まず任意の $i \in I$ に対して，$\mathfrak{A}_i \in K$ が存在して $\mathfrak{A}_i \models i$ となることを背理法で示す．ある $i \in I$ について，$\forall \mathfrak{A} \in K (\mathfrak{A} \not\models i)$ とする．$i = \{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$ とおくと，任意の $\mathfrak{A} \in K$ について $\mathfrak{A} \models \neg \varphi_1 \vee \cdots \vee \neg \varphi_n$．よって，$\neg \varphi_1 \vee \cdots \vee \neg \varphi_n \in T$．$\mathfrak{B} \models T$ だから，ある k について $\mathfrak{B} \models \neg \varphi_k$

である．これは $\varphi_k \in i \subseteq \mathrm{Th}(\mathfrak{B})$ と矛盾する．

次に，各 $\varphi \in \mathrm{Th}(\mathfrak{B})$ に対して $J_\varphi = \{i \in I : \varphi \in i\}$ とおくと，$\{J_\varphi\}$ は有限交叉性をもつ（$\because$ $\{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\} \in J_{\varphi_1} \cap \cdots \cap J_{\varphi_n}$）ので，$\{J_\varphi\} \subseteq \mathcal{U}$ となる超フィルター $\mathcal{U}$ が存在する．そこで，$\mathfrak{A} = \prod \mathfrak{A}_i/\mathcal{U}$ とおくと，仮定(超積について閉)から $\mathfrak{A} \in K$ である．

最後に，$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ を示せば，仮定(初等的同値について閉)から $\mathfrak{B} \in K$ を得て，証明が完成する．まず，$\mathfrak{B} \models \varphi$ とする．$i \in J_\varphi \Rightarrow \varphi \in i \Rightarrow \mathfrak{A}_i \models \varphi$ より，$J_\varphi \subseteq \{i : \mathfrak{A}_i \models \varphi\}$．したがって，$\{i : \mathfrak{A}_i \models \varphi\} \in \mathcal{U}$，すなわち $\mathfrak{A} \models \varphi$ である．逆に，$\mathfrak{B} \not\models \varphi$ とすると，$\mathfrak{B} \models \neg\varphi$ だから，いま示したことから $\mathfrak{A} \models \neg\varphi$ がいえ，$\mathfrak{A} \not\models \varphi$ である．□

定義 4.4.9　各 $i \in I$ について $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}$ のとき，$\prod \mathfrak{A}_i/\mathcal{U}$ を $\mathfrak{A}$ の**超ベキ**(ultrapower)と呼び，$\mathfrak{A}^I/\mathcal{U}$ で表す．

$a \in |\mathfrak{A}|$ に対して常に値 a をとる関数 $\lambda i.\, a \in \prod \mathfrak{A}_i$ をとり，$^*a = [\lambda i.\, a] \in |\mathfrak{A}^I/\mathcal{U}|$ とおく．このとき，$d(a) = {}^*a$ で定まる関数 $d : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{A}^I/\mathcal{U}|$ を $\mathfrak{A}$ の $\mathfrak{A}^I/\mathcal{U}$ への**自然な埋め込み**(canonical embedding)という．

定義 4.4.10　埋め込み $\phi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ が**初等的埋め込み**であるとは，$\phi(\mathfrak{A}) \prec \mathfrak{B}$ が成り立つことである．

定理 4.4.11　$\prod \mathfrak{A}^I/\mathcal{U}$ を $\mathfrak{A}$ の超ベキとする．このとき，自然な埋め込み $d : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{A}^I/\mathcal{U}|$ は初等的埋め込みである．特に，$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}^I/\mathcal{U}$ が成り立つ．

証明　任意の論理式 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ と $a_1, \cdots, a_n \in |\mathfrak{A}|$ について，Łoś の定理より

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}^I/\mathcal{U} \models \varphi({}^*a_1, \cdots, {}^*a_n) &\Leftrightarrow \{i \in I : \mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \cdots, a_n)\} \in \mathcal{U} \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \cdots, a_n).\end{aligned}$$

よって，d は初等的埋め込みである．$d(\mathfrak{A}) \cong \mathfrak{A}$ だから，$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}^I/\mathcal{U}$ は明

らか. □

次の定理は，初等的同値性を超ベキの言葉で表現したものである.

定理 4.4.12 (Keisler–Shelah) $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} \Leftrightarrow$ ある I とその上の超ベキ $\mathcal{U}$ が存在して $\mathfrak{A}^I/\mathcal{U} \cong \mathfrak{B}^I/\mathcal{U}$.

$\Leftarrow$ は上の定理 4.4.11 から直ちに導けるが，$\Rightarrow$ の証明は専門的になりすぎるので省略する．詳細は [ChK] を見よ．そして，この定理を仮定すれば，次が得られる.

系 4.4.13 構造のクラス $\mathcal{K}$ が初等クラス(EC_Δ)になるための必要十分条件は，以下の2条件が成立することである.

(1) $\mathcal{K}$ は超積と同型に関して閉じている.

(2) $\mathfrak{A}^I/\mathcal{U} \in \mathcal{K} \Rightarrow \mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ (超根(超ベキの逆演算)に関して閉じている.)

証明 十分性をいうには，$\mathcal{K}$ が初等的同値性で閉じていることをいえばよい．$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ かつ $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ とする．上の定理より，$\mathfrak{A}^I/\mathcal{U} \cong \mathfrak{B}^I/\mathcal{U}$ となる超ベキ $\mathcal{U}$ がある．$\mathcal{K}$ は超積で閉じているので，$\mathfrak{A}^I/\mathcal{U} \in \mathcal{K}$．すると，$\mathcal{K}$ は同型で閉じているので，$\mathfrak{B}^I/\mathcal{U} \in \mathcal{K}$．さらに $\mathcal{K}$ は超根に関して閉じているので，$\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$ となる. □

補足 1. Stone の表現定理

超フィルターを使って，Stone の表現定理(第1章の定理 1.4.3)を証明する.

定理 4.4.14 (Stone の表現定理) 任意のブール代数 $\mathfrak{B}$ に対し，ある集合 X が存在し，$\mathfrak{B}$ はそのベキ集合代数 $\mathfrak{P}(X)$ に埋め込める.

証明 $\mathfrak{B} = (B, +, \cdot, -, 0, 1)$ を任意のブール代数とする．$x \leq y \Leftrightarrow x \cdot y = x$ による順序のもとで，フィルター(定義 4.3.2)，超フィルター(定義 4.4.2)などは，自然に $F \subseteq B$ に対しても定義できる．そして，X を B の超フィルター全体とし，

そのベキ集合 $\mathcal{P}(X)$ を考える．

いま，$f: B \to \mathcal{P}(X)$ を次のように定義する．各 $b \in B$ に対し，$f(b)$ は，b を含む超フィルターの全体である．すると，f が単射であることは次のようにしてわかる．$a \neq b$ であれば，$a \cdot (-b) \neq 0$ または $(-a) \cdot b \neq 0$ である．前者の場合，$\{a, -b\}$ は有限交叉性をもつので，それを含む超フィルター $U \subseteq B$ がある．よって，$U \in f(a)$ かつ $U \notin f(b)$ となって，$f(a) \neq f(b)$ を得る．後者の場合も同様である．

さらにフィルター F の性質 $(a \cdot b \in F \Leftrightarrow a \in F \wedge b \in F)$ より $f(a \cdot b) = f(a) \cap f(b)$ がいえ，また超フィルター U の性質 $(a \notin U \Leftrightarrow -a \in U)$ より $f(-a) = X - f(a)$ がいえる．すなわち，$f: B \to \mathcal{P}(X)$ は埋め込みになっている．□

補足 2.　射影クラス

言語 $\mathcal{L}$ における構造のクラス $\mathcal{K}$ が**射影クラス**(projective class, pseudo-elementary class)であるとは，ある拡張言語 $\mathcal{L}' \supseteq \mathcal{L}$ における初等クラス $\mathcal{K}' \in \mathrm{EC}_\Delta$ が存在して，$\mathcal{K}'$ に属する構造の言語 $\mathcal{L}$ への縮約全体と，$\mathcal{K}$ が一致する場合をいう．射影クラス全体を PC_Δ で表す．例えば，順序付け可能な群のクラスは，射影クラスである．

PC_Δ も超積と同型に関して閉じていることは容易にわかる．PC_Δ に対しても，様々な特徴付けが知られているが，特に次の結果は興味深く，また Craig の補間定理などをこの系として導くことができるという応用面からも重要である．

定理 4.4.15　$\mathcal{K}, \mathcal{K}' \in \mathrm{PC}_\Delta$ かつ $\mathcal{K} \cap \mathcal{K}' = \emptyset$ ならば，$\mathcal{T} \in \mathrm{EC}$ が存在して，$\mathcal{K} \subseteq \mathcal{T}$ かつ $\mathcal{T} \cap \mathcal{K}' = \emptyset$．但し，$\mathcal{T} \in \mathrm{EC}$ とは，ただ1つの文 σ によって $\mathcal{T} = \mathrm{Mod}(\{\sigma\})$ と表せるものをいう．

4.5　超準解析入門

前節で導入した超ベキを用いて，自然数，実数，関数空間など様々な構造に対し，それらを初等的部分構造として真に含む大きな構造(超準モデル)を作ることができる．特に，実数の超準モデルは，標準モデルから見ての無限大や無限小を要素として含んでおり，ライプニッツ流の無限小解析に初めて合理的なモデルを与えたものとして重要な意義をもつ．超準的手法は数学の様々な分野に応用されているが，特に解析学への応用は超準解析と呼ばれ，大きな研究領域になっている．

この節を通して，自然数 $\omega(=\mathbb{N})$ 上の非単項超フィルター $\mathcal{U}$ を1つ固定する．構造 $\mathfrak{A}$ の超ベキ $\prod \mathfrak{A}^I/\mathcal{U}$ を ${}^*\mathfrak{A}$ で表す．前節で示したように，$\mathfrak{A}$ から ${}^*\mathfrak{A}$ へは自然な埋め込み $d(a)={}^*a$ があり，$\mathfrak{A}$ とその像 $d(\mathfrak{A})$ を同一視すれば，$\mathfrak{A}$ は ${}^*\mathfrak{A}$ の初等的部分構造と見なせる．$\mathfrak{N}=(\mathbb{N},+,\cdot,0,1,<)$ や $\mathfrak{R}=(\mathbb{R},+,\cdot,0,1,<)$ など我々が数学的な経験の中で自然に理解している構造を**標準モデル**(standard model)といい，${}^*\mathfrak{N}$ や ${}^*\mathfrak{R}$ などをそれらの**超準モデル**(nonstandard model)という．

標準モデルとそれに対応する超準モデルは，初等的命題の真偽に関して差がないが，基本的な性質でも初等的に表現できないものがあることに注意しておきたい．この節で我々が扱うのは，実数の超準モデル ${}^*\mathfrak{R}$ であるが，そのアルキメデス性は初等的に表現できない．ここで，順序体 $\mathfrak{A}$ が，**アルキメデス的**(Archimedian)であるとは，任意の正の元 $a,b\in\mathbb{R}$ に対し，十分大きな自然数 $n\in\mathbb{N}$ が存在して，$b<a+a+\cdots+a$ (n 個) となることである．

定理 4.5.1　${}^*\mathfrak{R}$ は，非アルキメデス順序体である．

証明　$\mathfrak{R}$ は順序体であり，“順序体である”ことは初等的に記述できる性質であるから，${}^*\mathfrak{R}$ も順序体である．次に，非アルキメデス性をいうために，

$s = \langle 1, 2, 3, \cdots \rangle \in |\mathfrak{R}^\omega|$ とし，$N = [s] \in |{}^*\mathfrak{R}|$ とおく．このとき，任意の自然数 $n \in \mathbf{N}$ に対して，$N > {}^*1 + {}^*1 + \cdots + {}^*1$ (n 個) となる．なぜなら，$\{i : s(i) > n\} \in \mathcal{U}$ だから． □

定義 4.5.2 $|{}^*\mathfrak{R}|$ の元 a が**無限大**(infinite)であるとは，$\forall b \in \mathbb{R}\ b < |a|$ となることをいう．また，無限大でない元は**有限**(finite)であるという．$|{}^*\mathfrak{R}|$ の元 a が**無限小**(infinitesimal)であるとは，$\forall b (> 0) \in \mathbb{R}\ |a| < b$ となることをいう．

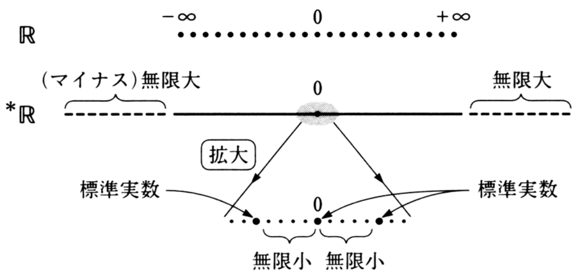


図 1

例 4 $N = [\langle 1, 2, 3, \cdots \rangle]$ は無限大であり，$1/N = [\langle 1/1, 1/2, 1/3, \cdots \rangle]$ は無限小である．

問題 9 (1) 無限小全体が + と・の演算で閉じていることを示せ．

(2) a が無限大であることと，$1/a$ が無限小であることは同値であることを示せ．

定義 4.5.3 $a, b \in |{}^*\mathfrak{R}|$ に対し，

$$a \approx b \Leftrightarrow a - b \text{ は無限小.}$$

$\approx$ は同値関係であり，さらに + と・の演算を保存していることも容易にわかる．

補題 4.5.4 有限超実数 $a \in |{}^*\mathfrak{R}|$ に対し，$a \approx b$ となる $b \in \mathbb{R}$ がただ1つ存在する．

証明 $b = \inf\{x \in \mathbb{R} : a < x\}$ とおけばよい．一意性は明らか． □

上の補題で存在が示された b を，a の**標準部分**(standard part)と呼び，$\mathrm{st}(a)$ で表す．容易にわかるように，$a - \mathrm{st}(a)$ は無限小である．したがって，すべての有限超実数 a は標準実数 $\mathrm{st}(a)$ と無限小の和で一意に表せる．

補題 4.5.5 $s = \langle a_i \rangle \in \mathbb{R}^\omega$ かつ $\lim a_i = a$ ならば，$[s] \approx {}^*a$ である．

証明 任意の正数 $\varepsilon \in \mathbb{R}$ に対し，$\{i : |a_i - a| < \varepsilon\} \in \mathcal{U}$．よって，$[s] - {}^*a$ は無限小である． □

定義 4.5.6 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対し，${}^*f : |{}^*\mathfrak{R}| \to |{}^*\mathfrak{R}|$ を以下のように定める： $s \in |\mathfrak{R}^\omega|$ に対して，

$$ {}^*f([s]) = [\lambda i. f(s(i))]. $$

上の定義が妥当であることは，

$$ \|s = s'\| \in \mathcal{U} \Rightarrow \|\lambda i. f(s(i)) = \lambda i. f(s'(i))\| \in \mathcal{U} $$

からしたがう．また，次のように考えても同じ ${}^*f$ が得られる．$\mathfrak{R} \cup \{f\} = (\mathbb{R}, f, +, \cdot, 0, 1, <)$ の超ベキを ${}^*\mathfrak{R} \cup \{{}^*f\}$ とする．

定理 4.5.7 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は $a \in \mathbb{R}$ で連続である $\Leftrightarrow$ 任意の $x \approx a$ に対して，${}^*f(x) \approx f(a)$．

証明 ($\Rightarrow$) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は $a \in \mathbb{R}$ で連続であるとし，$x = [\langle x_i \rangle] \approx a$ とする．正数 $\varepsilon \in \mathbb{R}$ を任意にとる．f の連続性から，ある正数 $\delta \in \mathbb{R}$ が存在して，

$$ \forall y \in \mathbb{R}(|y - a| < \delta \to |f(y) - f(a)| < \varepsilon). $$

したがって，

$$ \{i : |x_i - a| < \delta\} \subseteq \{i : |f(x_i) - f(a)| < \varepsilon\}. $$

いま $x \approx a$ だから，$\{i : |x_i - a| < \delta\} \in \mathcal{U}$，よって $\{i : |f(x_i) - f(a)|$

$< \varepsilon\} \in \mathcal{U}$ となる．すなわち，$^*f(x) \approx f(a)$．

($\Leftarrow$) f が $a \in \mathbb{R}$ で連続でないと仮定する．すなわち，ある正数 $\varepsilon \in \mathbb{R}$ が存在して，任意の $i \in \omega$ に対して，

$$|x_i - a| < \frac{1}{i+1} \wedge |f(x_i) - f(a)| \geq \varepsilon$$

となる x_i が存在する．そこで，$x = [\langle x_i \rangle]$ とおけば，$x \approx a$ だが，$|^*f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$．すなわち，$^*f(x) \not\approx f(a)$ となる． □

この補題から，連続関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ については，任意の $a \in |^*\mathfrak{R}|$ に対して，

$$\mathrm{st}(^*f(a)) = f(\mathrm{st}(a))$$

となることがわかる．

$\mathfrak{R}$ の関係 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ も自然に $^*\mathfrak{R}$ の関係 $^*S$ に拡張できる．特に，$^*\mathbf{N}$ や $^*\mathbf{Q}$ を $|^*\mathfrak{R}|$ の部分集合として考えることができ，$N = [\langle 1, 2, 3, \cdots \rangle] \in {}^*\mathbf{N}$ である．

いま，$^*\mathfrak{R}$ において区間 $[0, 1]$ の(超準)有限分割 $\{0, 1/N, \cdots, (N-1)/N, N/N\}$ を考える．$[0, 1]$ の標準実数 a が与えられたとき，$i/N \leq a \leq (i+1)/N$ となる $i \in {}^*\mathbf{N}$ をとれば，$a = \mathrm{st}(i/N)$ である．つまり，どんな標準実数も超準分数で表せる．

以上の考察に基づいて，解析学の多くの定理が超準解析の手法で証明できる．ここでは，2つだけ特徴的な例をあげる．

定理 4.5.8 連続関数 $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ は，最大値をもつ．

証明 $^*\mathfrak{R}$ の中で，有限集合 $\{^*f(0), {}^*f(1/N), \cdots, {}^*f((N-1)/N), {}^*f(N/N)\}$ を考える．その最大値を $^*f(i/N)$ とすれば，関数 f は $x = \mathrm{st}(i/N)$ で最大値 $\mathrm{st}(^*f(i/N))$ をとる． □

次の例は，定理の文面も証明もかなり大雑把なので，興味のある方は文献

[AFHL] などで確認されたい.

定理 4.5.9 (Peano)　$f:[0,1]^2 \to \mathbb{R}$ を任意の連続関数とする．このとき，次の微分方程式は解をもつ.

$$dy/dx = f(x, y), \quad y(0) = 0.$$

証明のアイデア　解のもとになる関数 $Y:\{0, 1/N, \cdots, N/N\} \to {}^*\mathfrak{R}$ を次のように帰納的に定義する.

$$Y(k/N) = \sum_{i=0}^{k-1} {}^*f(Y(i/N), i/N) \cdot 1/N.$$

そして，$y:[0,1] \to \mathbb{R}$ を次のように定める．$[0,1]$ の標準実数 a が与えられたとき，$k/N \leq a \leq (k+1)/N$ となる $k \in {}^*\mathbb{N}$ をとり，$y(a) = \mathrm{st}(Y(k/N))$ とする.　□

5

自然数論　形式体系編

自然数論の公理的な扱いとしては「ペアノの公理」(Peirce(1881), Dedekind(1888), Peano(1889)らによる)が有名であるが，これは「ユークリッドの原論」と同じく現代的には公理と呼ぶのに相応しくないものであり，それを修正し，述語論理上に形式化したのはHilbert(1920年代)である．したがって，ここで導入する公理系は，Hilbertの1階算術体系Zと呼ぶのが正確なのだが，慣用により「ペアノ算術」と呼ぶ．

本章では，ペアノ算術と部分体系の様々な性質，特に表現可能性と証明可能性を調べる．これらの考察を総合して得られる結果が，どんな算術の体系にも証明も反証もできない文が存在するというGödelの第一不完全性定理である．他方，掛け算のない体系(プレスバーガー算術)においては，このような不完全現象が生じないことも見る．

5.1 ペアノ算術と部分体系

本節では，ペアノ算術 PA とその代表的な部分体系 $\mathrm{PA}^-, \mathrm{I}\Sigma_n, \mathrm{Q}$ などを定義し，その基本的な性質を調べる．

まず，言語 $\mathcal{L}_{\mathrm{OR}}$ を順序環の記号集合（$+, \cdot, 0, 1, <$）とする．ペアノ算術はこの言語における理論として，次のように定義される．

定義 5.1.1　ペアノ算術(Peano arithmetic, PA と略す)は，次の公理からなる $\mathcal{L}_{\mathrm{OR}}$ の理論である．

A 1.　$\forall x \neg(x+1=0)$.

A 2.　$\forall x \forall y\ (x+1=y+1 \to x=y)$.

A 3.　$\forall x\ (x+0=x)$.

A 4.　$\forall x \forall y\ (x+(y+1)=(x+y)+1)$.

A 5.　$\forall x\ (x\cdot 0=0)$.

A 6.　$\forall x \forall y\ (x\cdot(y+1)=x\cdot y+x)$.

A 7.　$\forall x \neg(x<0)$.

A 8.　$\forall x \forall y\ (x<y+1 \leftrightarrow x<y \vee x=y)$.

A 9.　$\varphi(0) \wedge \forall x\,(\varphi(x) \to \varphi(x+1)) \to \forall x\, \varphi(x)$，但し，$\varphi(x)$ は任意の $\mathcal{L}_{\mathrm{OR}}$-論理式で，$x$ 以外にも自由変数を含んでいてよい．(厳密には，A 9 の論理式全体を適当な全称記号で束縛して，文に直したものを A 9 とする．)

A 1, A 2 は“次の数”$x+1$ の性質を規定する最も基本的な公理であり，ペアノの原典にもある．A 3, A 4 は足し算，A 5, A 6 は掛け算，A 7, A 8 は不等号をそれぞれ帰納的に定める公理であり，すべてペアノの原典にはない．A 9 は帰納法を表す公理図式(axiom scheme)であり，論理式 $\varphi(x)$ 毎に設定される公理をまとめて書いたものである．ペアノの原典では，帰納法を集合の言葉で表現していたが，公理図式を用いることで集合論を前提とし

なくなったところがこの形式化の重要なポイントである．

自然数の構造 $\mathfrak{N}=(\mathbf{N},+,\cdot,0,1,<)$ はPAの**標準モデル**(standard model)である．また，順序数 ω^ω 上に順序数の和積演算などを備えた構造 $(\omega^\omega,+,\cdot,0,1,<)$ はA1〜A8のモデルになる．

ペアノの原典に足し算や掛け算の公理がないのは，必要に応じてあとから関数を追加することを許していたからである．現代の公理論的な立場でも，関数の追加はできるが，それは定義による拡大によってのみ行われる(3.4節参照)．つまり $T\vdash\forall x\,\exists!y\,\varphi(x,y)$ が成り立つとき $\forall x\,\forall y\,(\varphi(x,y)\leftrightarrow f(x)=y)$ となる関数 f を理論 T に追加できる．しかし，掛け算がない体系 (PA－A5－A6) では，掛け算 $x\cdot y=z$ を足し算だけの論理式 $\varphi(x,y,z)$ で表せないので，PA－A5－A6 はPAより真に弱い体系である．同様なことは，掛け算をもち，足し算をもたない体系についてもいえるが，そもそも足し算なしに掛け算の公理を記述することは容易でない．(関連した話題は，本章の最後の節で扱う)．

他方，不等号の公理A7, A8は取り除いて，次の定義によって $<$ を導入することもできる．

A7.5. $\forall x\,\forall y\,(x<y\leftrightarrow\exists z\,(z+x+1=y))$.

しかし，我々は $\mathcal{L}_{\mathrm{OR}}$ の論理式をその形によって分類したいので，$<$ を定義された記号，つまりA7.5の右辺の略記として考えると具合が悪い．A7, A8の代わりにA7.5を用いるにしても，それを公理として最初から仮定しておかなければならない．(補注．公理A1〜A6の下で，A7.5→A7 であるが，A7＋A8とA7.5は互いに比較不能である．実際，構造 $(\omega^\omega,+,\cdot,0,1,<)$ はA7.5を成り立たせないし，下の問題1の (2) の略解にあるような構造にA7.5を定義として $<$ を入れれば，公理A1〜A7＋A7.5を満たし，A8を満たさないものになる．公理A1〜A6＋A9で，A7＋A8とA7.5が一致することは，系5.1.6およびそれに続く問題2から明らか．)

各自然数 i について，論理式のクラス Σ_i と Π_i を帰納的に定義する．

定義 5.1.2　原子式から命題結合記号と有界量化記号 $\forall x < t$, $\exists x < t$ だけを使って作られる論理式を**有界な**(bounded)論理式，Σ_0 論理式あるいは Π_0 論理式と呼ぶ．ここで，$\forall x < t$ は $\forall x\,(x < t \to \cdots)$，$\exists x < t$ は $\exists x\,(x < t \land \cdots)$ の省略形で，t は x を含まない項とする．φ が Σ_i 論理式のとき $\forall x_1 \cdots \forall x_k\, \varphi$ を Π_{i+1} 論理式，φ が Π_i 論理式のとき $\exists x_1 \cdots \exists x_k\, \varphi$ を Σ_{i+1} 論理式という．Σ_i 論理式全体の集合を Σ_i で表し，Π_i についても同様とする．

この定義では，どの分類にも属さない式が多数ある．例えば，φ が Π_i 式のとき$(i \neq 0)$，$\neg\varphi$ は上の分類に属さない．しかし，$\neg\varphi$ と論理的に同値な Σ_i 論理式がすぐに見つかるので，これを Σ_i 論理式と呼ぶこともある．任意の論理式に対して，それと同値な論理式で上の分類に入るものを見つける手続きがあるが，以下でその事実を必要としないので説明を省略する．

定義 5.1.3　ペアノ算術 PA における帰納法図式 A 9 をある論理式のクラス $\Gamma \supseteq \Sigma_0$ に制限してできる公理系を $\mathrm{I}\Gamma$ と呼ぶ．

特に重要な部分体系は，$\mathrm{I}\Sigma_0$ と $\mathrm{I}\Sigma_1$ である．$\Gamma \subsetneqq \Sigma_0$ の場合に $\mathrm{I}\Gamma$ に類するものを考えると帰納法以外の公理の設定の仕方に依存してバリエーションがたくさんできる．次に定義する体系 Q は，$\Gamma = \emptyset$ とする体系，つまり帰納法をもたない体系で，最弱の算術体系として扱われることが多い．

定義 5.1.4　**Robinson の体系** Q は，環の言語 $\mathcal{L}_{\mathrm{R}} = (+, \cdot, 0, 1)$ における理論で，帰納法をもたず，PA の公理 A 1～A 6 と次の公理からなる：

A 10.　$\forall x\,(x \neq 0 \to \exists y\,(y + 1 = x))$.

また，体系 Q に不等号の公理 A 7.5 を加えたものを $\mathrm{Q}_<$ とする．

問題 1　次のことを証明せよ．　(1)　$\mathrm{Q} \vdash 0 + 1 = 1$.

(2)　$\mathrm{Q} - \mathrm{A\,10} \nvdash 0 + 1 = 1$.

(3)　$\mathrm{Q} \nvdash \forall x (0 + x = x)$.

補題 5.1.5 $I\Sigma_0$ は，**離散的順序半環**の理論(PA^- と呼ばれる)を包含する．すなわち，$I\Sigma_0$ で以下が証明できる．

(1) 半環の公理(可換環の公理から加法逆元の存在を除く)．

(2) 差の公理 $x < y \to \exists z(z+x+1=y)$．

(3) 0 を最小元とする線形順序で，離散的$(0 < x \leftrightarrow 1 \leq x)$である．

(4) 演算の順序保存性 $x < y \to x+z < y+z \wedge (x \cdot z < y \cdot z \vee z=0)$．

証明 (1) は，等式(の前に全称記号 $\forall$ を付けた文)の集まりである．例えば，加法の結合律 $(x+y)+z = x+(y+z)$ が含まれているが，これは z に関する帰納法によって簡単に示せる．他の等式についても，ある 1 つの変数に関して帰納法を用い，他の変数はそのまま自由変数として，証明できる．

次に (2) であるが，$x < y \to \exists z < y\,(z+x+1=y)$ は Σ_0 論理式であり，y についての帰納法で証明可能である．まず，$y=0$ のときは自明に成り立つ．y のときを仮定して，$y+1$ の場合を考える．$x < y+1$ とすると，$x < y$ か $x = y$ (公理 A 8) である．前者の場合は帰納法の仮定がそのまま使え，$\exists z < y\,(z+x+1=y)$ であるから，(1) で示した加法の可換性を用いて，$\exists z' < y+1\,(z'+x+1=y+1)$ がいえる．後者については，$\exists z < y+1\,(z+y+1=y+1)$ をいえばよいが，これは $z=0$ として明らかである．

(3) と (4) は，開論理式(の前に全称記号 $\forall$ を付けた文)の集まりであるから，これらに対しても適当な変数を選んで帰納法を用いればよい． □

系 5.1.6 $Q_<$ は，離散的順序半環の理論 PA^- の部分体系であり，したがって $I\Sigma_0$ の部分体系である．

証明 公理 A 7.5 と A 10 を PA^- で証明すればよい．まず，A 10 であるが，$x \neq 0 \to x > 0$ は補題 5.1.5 の (3) の中に含まれる主張であるから，

これと補題の(2)を用いれば，直ちに A 10 を得る．

次に，A 7.5 であるが，→ は補題の(2)であるから，← を示せばよい．$\exists z\,(z+x+1=y)$ を仮定し，$x<y$ でないとして矛盾を導く．補題の(3)より全順序の公理が成り立っているから，$x=y$ または $x>y$ である．$x=y$ のときは $z+y+1=y$ であるが，$z+1>0$ より $z+y+1>y$ だから矛盾となる．$x>y$ のときは，→ より $\exists z'\,(z'+y+1=x)$，よって $z+z'+y+1+1=y$ となり，同様に矛盾となる．□

問題 2　開論理式についての帰納法を $\mathrm{Q}_<$ に加えれば，PA^- を包含する理論になることを確かめよ．

問題1で見たように，$\mathrm{Q}_<$ では $\forall x\,(0+x=x)$ も証明できないし，PA^- に比べても非常に弱い体系である．にもかかわらず，Σ_1 文についてなら，真なるものはすべて $\mathrm{Q}_<$ の定理となること(Q の Σ_1 完全性)がわかる．次に，この事実を見ていこう．

言語 $\mathcal{L}_{\mathrm{R}}$ において，自然数 $n\,(>0)$ の標準的な形式表現を $\bar{n}=\overbrace{1+\cdots+1}^{n\text{個}}$ とし，$n=0$ のときは $\bar{0}=0$ とする．そして，記号列 $\bar{n}$ を**数項**(numeral)と呼ぶ．

補題 5.1.7　m, n を任意の自然数とする．$\mathrm{Q}_<$ において，以下が証明できる．

(1)　$\bar{m}+\bar{n}=\overline{m+n}$.

(2)　$\bar{m}\cdot\bar{n}=\overline{m\cdot n}$.

(3)　$\bar{m}\neq\bar{n}$　($m\neq n$ のとき).

(4)　$x<\overline{n+1}\leftrightarrow x=\bar{0}\vee\cdots\vee x=\bar{n}$.

(5)　$x<\bar{n}\vee x=\bar{n}\vee\bar{n}<x$.

証明　(1)～(5)の各々に対して，(m を任意に固定し) n に関するメタ帰納法で証明する．ここで，“すべての n について $\mathrm{Q}_<\vdash\varphi(\bar{n})$” が成り立つ

ことと，$\mathrm{Q}_< \vdash \forall x\, \varphi(x)$ が成り立つことの違いに注意せよ．後者の証明には体系内の帰納法が必要であるが，前者はメタな立場の主張であり，帰納法の使用に制約はない．

(1), (2) は，$\mathrm{Q}_<$ の公理から直ちに導ける．次に，(3) を示す．まず，$n = 0$ とし，$m \neq n = 0$ と仮定する．このとき，$\bar{m}$ は定義より $t+1$ と書けるので，公理 A 1 より $\bar{m} \neq 0$ が証明できる．次に，帰納法のステップを示すために，$m \neq n+1$ とする．$m = 0$ であれば，$\bar{m} = 0 \neq \overline{n+1}$ がいえる．$m \neq 0$ であれば，$m-1 \neq n$ だから，帰納法の仮定を用いて，$\overline{m-1} \neq \bar{n}$ が証明される．したがって，公理 A 2 の対偶より，$\bar{m} \neq \overline{n+1}$ がいえる．

(4) を示す前に，まず $x < y \leftrightarrow x+1 < y+1$ を確認しておく．→ は自明であり，← は公理 A 7.5 および A 2 による．さて，$n = 0$ のとき，(4) は明らかに成立する．いま，n について $y < \overline{n+1} \leftrightarrow y = \bar{0} \vee \cdots \vee y = \bar{n}$ を仮定すれば，$y+1 < \overline{n+2} \leftrightarrow y+1 = \bar{1} \vee \cdots \vee y+1 = \overline{n+1}$ である．公理 A 10 より $\forall x\,(x \neq 0 \rightarrow \exists y\,(y+1 = x))$ であるから，$\forall x\,(x \neq 0 \rightarrow (x < \overline{n+2} \leftrightarrow x = \bar{1} \vee \cdots \vee x = \overline{n+1}))$．よって，$x < \overline{n+2} \leftrightarrow x = \bar{0} \vee x = \bar{1} \vee \cdots \vee x = \overline{n+1}$ となり，帰納法のステップが示された．

最後に，(5) を示す．まず，$n = 0$ の場合，$x \neq 0$ とすると，公理 A 10 と A 7.5 より $x > 0$ となるから，成立している．n において $x < \bar{n} \vee x = \bar{n} \vee \bar{n} < x$ とする．(4) より，$x < \bar{n} \vee x = \bar{n} \rightarrow x < \overline{n+1}$ である．また，$\bar{n} < x$ ならば，$z + \bar{n} + 1 = x$ となる z がある．$z = 0$ ならば，$\overline{n+1} = 0 + \bar{n} + 1 = x$ である．$z \neq 0$ ならば，公理 A 10 より $z = y+1$ とおくと，$y + \overline{n+1} + 1 = z + \bar{n} + 1 = x$ より $\overline{n+1} < x$ である．よって，$x < \overline{n+1} \vee x = \overline{n+1} \vee \overline{n+1} < x$ となり，帰納法のステップが示された．　□

定理 5.1.8（$\mathrm{Q}_<$ の Σ_1 完全性）　φ を Σ_1 文とすると，

$$\mathfrak{N} \models \varphi \Rightarrow \mathrm{Q}_< \vdash \varphi.$$

証明 Σ_1 文 φ の構成に関する帰納法で証明する．変数を含まない項 t の値が n であるとき，つまり $\mathfrak{N} \models t = \bar{n}$ であれば，$Q_< \vdash t = \bar{n}$ となることは，補題 5.1.7 の (1), (2) を用い，項の構成に関する帰納法でいえる．よって，文 $s = t$ に対し $\mathfrak{N} \models s = t \Rightarrow Q_< \vdash s = t$ がいえる．また，補題の (3) より，$\mathfrak{N} \models s \neq t \Rightarrow Q_< \vdash s \neq t$ もいえる．$\mathfrak{N} \models \bar{m} < \bar{n}$ であれば，$m < n$ であり，$Q_< \vdash \bar{m} = \bar{0} \vee \cdots \vee \bar{m} = \overline{n-1}$ となるから，補題の (4) より $Q_< \vdash \bar{m} < \bar{n}$．$\mathfrak{N} \models \bar{m} \not< \bar{n}$ であれば，$m \geq n$ であり，$Q_< \vdash \bar{m} \neq \bar{0} \wedge \cdots \wedge \bar{m} \neq \overline{n-1}$ となるから，補題の (4) より $Q_< \vdash \bar{m} \not< \bar{n}$．以上によって，$\varphi$ が原子文もしくはその否定のときに，定理の主張が証明された．

φ が $\psi_1 \vee \psi_2$ または $\psi_1 \wedge \psi_2$ のときは，容易に帰納法の仮定に還元できる．φ を $\forall x < t\, \psi(x)$ として，$\mathfrak{N} \models \forall x < t\, \psi(x)$ と仮定する．項 t の値を n とおくと，$\mathfrak{N} \models \psi(\bar{0}) \wedge \cdots \wedge \psi(\overline{n-1})$ となるから，帰納法の仮定より $Q_< \vdash \psi(\bar{0}) \wedge \cdots \wedge \psi(\overline{n-1})$，すなわち $Q_< \vdash \forall x((x = \bar{0} \vee \cdots \vee x = \overline{n-1}) \to \psi(x))$．したがって補題の (4) より $Q_< \vdash \forall x < t\, \psi(x)$ となる．φ が $\exists x < t\, \psi(x)$ のときも同様に扱える．φ が $\neg\varphi$ のときは，ド・モルガンの法則を用いて否定記号 $\neg$ を原子式の直前にもっていけば以上のケースに還元できるので，φ が Σ_0 のときには定理の主張が証明された．

最後に，φ が $\exists x\, \psi(x)$ で，$\mathfrak{N} \models \exists x\, \psi(x)$ とする．このとき，$\mathfrak{N} \models \psi(\bar{n})$ となる n がある．すると，帰納法の仮定より $Q_< \vdash \psi(\bar{n})$ であり，したがって $Q_< \vdash \exists x\, \psi(x)$ となる．以上で，定理の主張が証明された．□

系 5.1.9 $PA^-, I\Sigma_n, PA$ はすべて Σ_1 完全である．

5.2 定義可能性と表現可能性

本節では，まず $I\Sigma_1$ のいくつかの基本性質，特に原始再帰的関数の定義可能性を調べ，そして $Q_<$ において再帰的集合が表現可能であることを示す．

定義 5.2.1 $\mathcal{L}_{\mathrm{OR}}$ の論理式 $\varphi(x, y_1, \cdots, y_k)$ に対して，次の論理式

$$\forall x < u \,\exists y_1 \cdots \exists y_k \,\varphi(x, y_1, \cdots, y_k) \rightarrow$$
$$\exists v \,\forall x < u \,\exists y_1 < v \cdots \exists y_k < v \,\varphi(x, y_1, \cdots, y_k)$$

を $\varphi(x, y_1, \cdots, y_k)$ の**採集原理**(collection principle)と呼び，$\mathrm{B}\varphi$ と書く．ここで，$\varphi(x, y_1, \cdots, y_k)$ は v 以外なら表示されていない変数を含んでよく，採集原理を文として扱う場合は，すべての自由変数を全称記号で束縛させたものを考える．Γ を論理式のクラスとして，

$$\mathrm{B}\Gamma = \mathrm{I}\Sigma_0 \cup \{\mathrm{B}\varphi : \varphi \in \Gamma\}$$

とおく．

補題 5.2.2 $\mathrm{I}\Sigma_1 \vdash \mathrm{B}\Sigma_1$.

証明 $\exists z_1 \cdots \exists z_l \,\varphi(x, y_1, \cdots, y_k, z_1, \cdots, z_l)$ を任意の Σ_1 論理式，$\varphi(x, y_1, \cdots, y_k, z_1, \cdots, z_l)$ を Σ_0 とする．$\forall x < u \,\exists y_1 \cdots \exists y_k \exists z_1 \cdots \exists z_l \,\varphi(x, y_1, \cdots, y_k, z_1, \cdots, z_l)$ を仮定する．（厳密な議論では，u およびその他の自由変数を一度新しい定数に読み替えて，証明の最後にもとの変数に戻す．）下記の Σ_1 論理式を $\psi(w)$ とおき，$\forall w \,\psi(w)$ を帰納法で証明する：

$$(\exists v \,\forall x < w \exists y_1 < v \cdots \exists y_k < v \exists z_1 < v \cdots \exists z_l < v \,\varphi) \vee u < w.$$

$\psi(0)$ は明らかに成り立つ．$\psi(w)$ を仮定し，$\psi(w+1)$ を示す．$u < w+1$ のときは直ちに $\psi(w+1)$ であるから，$w < u$ の場合を考える．最初の前提から，$\varphi(w, y_1', \cdots, y_k', z_1', \cdots, z_l')$ を成り立たせる $y_1', \cdots, y_k', z_1', \cdots, z_l'$ があり，帰納法の仮定 $\psi(w)$ から，$\forall x < w \,\exists y_1 < v \cdots \exists y_k < v \,\exists z_1 < v \cdots \exists z_l < v \,\varphi$ となる v がある．そこで，$v' = \max\{v, y_1'+1, \cdots, y_k'+1, z_1'+1, \cdots, z_l'+1\}$ とおけば，$\forall x < w+1 \,\exists y_1 < v' \cdots \exists y_k < v' \,\exists z_1 < v' \cdots \exists z_l < v' \,\varphi$ となり，$\psi(w+1)$ が成り立つ．よって，Σ_1 帰納法により，すべての w で $\psi(w)$ が成立するから，特に $w = u$ として，$\exists v \,\forall x < u \,\exists y_1 < v \cdots \exists y_k < v \,\exists z_1 < v \cdots \exists z_l < v \,\varphi$．したがって，$\exists v \,\forall x < u \,\exists y_1 < v \cdots \exists y_k < v \,\exists z_1 \cdots \exists z_l \,\varphi$ を得る． □

上と同様にして任意の n について，$\mathrm{I}\Sigma_{n+1} \Rightarrow \mathrm{B}\Sigma_{n+1}$ が証明できる．特にPAでは任意の採集原理が証明できる．さらに，$\mathrm{I}\Sigma_0$ にすべての採集原理を加えた体系が，PAと同値になることも下の問題3からわかる．

系 5.2.3　$\mathrm{B}\Sigma_1$ において，Σ_1 論理式の前に有界量化記号 $\forall x < t, \exists x < t$ を付けたものは，Σ_1 論理式と同値になる．

証明　$\exists y_1 \cdots \exists y_k\, \varphi(x, y_1, \cdots, y_k)$ を任意の Σ_1 論理式とし，$\varphi(x, y_1, \cdots, y_k)$ は Σ_0 とする．$\mathrm{B}\Sigma_1$ より，$\forall x < t\, \exists y_1 \cdots \exists y_k\, \varphi(x, y_1, \cdots, y_k) \to \exists v\, \forall x < t\, \exists y_1 < v \cdots \exists y_k < v\, \varphi(x, y_1, \cdots, y_k)$ であり，また上の論理式の逆 $\leftarrow$ が成り立つことは明らかである．いま右辺は Σ_1 論理式であるから，Σ_1 論理式の前に $\forall x < t$ を付けたものは Σ_1 論理式と同値になる．Σ_1 論理式の前に $\exists x < t$ を付けた論理式が Σ_1 論理式に直せることは明らかである．□

問題 3　（1）　$\mathrm{I}\Sigma_n$ と $\mathrm{I}\Pi_n$ とは同値であることを示せ．

（2）　$\mathrm{B}\Sigma_{n+1} \Rightarrow \mathrm{I}\Sigma_n$ を示せ．

次の補題は，$\mathrm{I}\Sigma_1$ において，有限集合や有限列を自然数でコード化するための基本的な道具になる．

補題 5.2.4　$\mathrm{I}\Sigma_1$ において，任意の Σ_1 論理式 $\varphi(x)$ と Π_1 論理式 $\psi(x)$ に対して，次が証明できる．

$$\forall x\,(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)) \to$$
$$\forall u\, \exists m, n > 0\, \forall x < u\, (\varphi(x) \leftrightarrow m(x+1)+1 \text{ は } n \text{ の約数}).$$

証明　まず，u を任意に固定する．すべての $i < u$ を約数としてもつような数 m の存在は Σ_1-帰納法で簡単にいえる．（注意．$m = (u-1)!$ もこれを満たすが，階乗の存在は後で示す原始再帰法を用いない限り自明ではない．）すると，すべての $i < u$ について，$m(i+1)+1$ は互いに素となる．なぜなら，$i < j < u$ として，$m(i+1)+1$ と $m(j+1)+1$ が共に

素数 d の倍数であると仮定すれば，d は m の約数になることはなく，したがって $d \geq u$ である．他方，$(m(j+1)+1)-(m(i+1)+1)=m(j-i)$ も d の倍数になるはずだが，素数 d は m の約数でなく，$d \geq u > j-i$ だから矛盾である．

次に，$\varphi(x)$ を Σ_1 論理式，$\psi(x)$ を Π_1 論理式として，$\forall x\,(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x))$ を仮定する．そして，j についての Σ_1-帰納法で，以下を証明する：

$$\exists n \forall x < j[(\psi(x) \to m(x+1)+1 \text{ は } n \text{ の約数}) \land (m(x+1)+1 \text{ は } n \text{ の約数} \to \varphi(x))] \lor u < j.$$

$j=0$ のとき明らか．j のときに上式を満たす n を n_j とする．いま，$\varphi(j)$ ならば，$n_{j+1}=n_j\cdot(m(j+1)+1)$ とおき，そうでなければ $n_{j+1}=$ (n_j から $m(j+1)+1$ の因数をすべて消去したもの，つまり n_j を $m(j+1)+1$ で割れるだけ割ったときの商) とおくと，$j+1 \leq u$ に対して n_{j+1} は上式を満たす．したがって，任意の j について上式が証明されたので，$j=u$ として題意が成り立つ．　□

上の系を満たす 3 つ組 (u, m, n) を，Σ_1 論理式 $\varphi(x)$ (と Π_1 論理式 $\psi(x)$) が定める集合 $\{x : \varphi(x)\}$ の u-**切片コード** (section code) と呼ぶ．すなわち，(u, m, n) は $\{x < u : \varphi(x)\}$ を表す．この結果を，k 変数の論理式 ($\mathbf{N}^k$ の部分集合) に拡張するのは容易である．まず，自然数のペア (x, y) を 1 つの自然数 $\langle x, y\rangle = \dfrac{(x+y)(x+y+1)}{2}+x$ に対応させる．このとき，$u=\langle u_1, u_2\rangle$ とすると，任意の $x < u_1$, $y < u_2$ に対して $\langle x, y\rangle < u$ となることに注意せよ．すると，補題 5.2.4 より，Σ_1 論理式 $\varphi(x, y)$ に対して，

$$\forall x < u_1 \forall y < u_2\,(\varphi(x, y) \leftrightarrow m(\langle x, y\rangle+1)+1 \text{ は } n \text{ の約数})$$

となる u-切片コード $c=(u, m, n)$ が求まる．これを 2 変数の場合の (u_1, u_2)-切片コードと考えればよい．一般に，k-組 $(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ は，$\langle\langle\cdots\langle x_1, x_2\rangle, \cdots\rangle, x_k\rangle$ によって自然数と 1 対 1 対応させて，2 変数の場合と同様にして論理式を 1 変数化させてコードを求めればよい．

定理 5.2.5　$I\Sigma_1$ において，原始再帰的関数(のグラフ)は，Σ_1 論理式でも Π_1 論理式でも表せ，かつそれが関数であることを証明できる．

証明　原始再帰的関数の構成に関する帰納法で証明するが，問題になるのは原始再帰法による定義の部分だけである．そこで，l 変数関数 g と $(l+2)$ 変数関数 h が共に Σ_1 論理式でも Π_1 論理式でも表せるとして，

$$f(x_1, \cdots, x_l, 0) = g(x_1, \cdots, x_l),$$
$$f(x_1, \cdots, x_l, y+1) = h(x_1, \cdots, x_l, y, f(x_1, \cdots, x_l, y))$$

を満たす $(n+1)$ 変数関数 f が Σ_1 論理式 $\varphi(x_1, \cdots, x_l, y, z)$ でも Π_1 論理式 $\psi(x_1, \cdots, x_l, y, z)$ でも表せることをいえばよい．このとき，$\forall x_1 \cdots \forall x_l \forall y \exists ! z\, \varphi(x_1, \cdots, x_l, y, z)$ となることは，$I\Sigma_1$ から容易に導ける．以下，簡単のため，$l = 0$ とする．したがって，$g(\ \ )$ は定数 g である．

まず，“$m(x+1)+1$ は n の約数である”を表す Σ_0 論理式を $\gamma(x, m, n) \equiv \exists d < n\ (m(x+1)+1)\cdot d = n$ とする．そして，Σ_0 論理式 $\delta(u, m, n)$ を以下のように定義する．$u = (u_1, u_2)$ として

$$\begin{aligned}
\delta(u, m, n) \Leftrightarrow\ & \\
& \forall y' < u_1 \exists z' < u_2\, \gamma(\langle y', z' \rangle, m, n) \\
& \wedge\ \forall z < u_2\, (\gamma(\langle 0, z \rangle, m, n) \leftrightarrow z = g) \\
& \wedge\ \forall y < u_1 - 1\, \forall z < u_2\, \forall z' < u_2 \\
& \qquad (\gamma(\langle y+1, z \rangle, m, n) \leftrightarrow z = h(y, z') \wedge \gamma(\langle y, z' \rangle, m, n)).
\end{aligned}$$

このとき，補題5.2.4の証明と同様にして，$I\Sigma_1$ より，$\forall u_1 \exists u_2 \exists m \exists n\ \delta(\langle u_1, u_2 \rangle, m, n)$ がいえる．そして

$$\begin{aligned}
f(y) = z &\Leftrightarrow \exists u\, \exists m\, \exists n\, (u_1 = y+1 \wedge \delta(u, m, n) \wedge \gamma(\langle y, z \rangle, m, n)) \\
&\Leftrightarrow \forall u\, \forall m\, \forall n\, (u_1 = y+1 \wedge \delta(u, m, n) \rightarrow \gamma(\langle y, z \rangle, m, n))
\end{aligned}$$

となる．　□

この定理5.2.5により，$I\Sigma_1$ に原始再帰的関数に対する記号とその定義を加えても保存的拡大になる．そして，原始再帰的関数を入れても，Σ_n や Π_n

論理式($n>0$)のクラスも本質的に変わらないことがわかる．つまり，原始再帰的関数を含む Σ_n 論理式は，その中の原始再帰的関数をそれを定義する Σ_1 論理式や Π_1 論理式で置き換えることによって，同値で原始再帰的関数を含まない Σ_n 論理式に直すことができる．

さらに応用を見てみよう．まず，$\mathrm{I}\Sigma_1$ には，自然数の有限列 $(s_0,\cdots,s_{n-1})$ を自然数 s で一意にコードするような関数(定義 2.3.10 およびその上の例)が入っているとしてよい．補題 5.2.4 で，Σ_1 論理式と Π_1 論理式で定める集合の u-切片コードの存在を示したが，今後は主にこちらのコードを使おう．さらに，補題 5.2.4 を一般化する結果として，次のこともいえる．

補題 5.2.6　$\mathrm{I}\Sigma_1$ において，以下のことが証明できる．$\varphi(x)$ を，いくつかの Σ_1 論理式から命題論理結合と有界量化記号を使って得られる論理式($\Sigma_0(\Sigma_1)$ 論理式と呼ぶ)とする．このとき，

$$\forall u\ \exists s\ \forall x<u\ (s_x\neq 0\leftrightarrow\varphi(x)).$$

証明は，$\Sigma_0(\Sigma_1)$ 論理式の構成に関するメタ帰納法である．興味のある方への演習問題としておこう．

以下では，体系 $\mathrm{Q}_<$ の表現可能性を調べるが，その前に再帰的な集合と上で導入した論理式の階層の関係を述べる．

定義 5.2.7　$\mathfrak{N}=(\mathbf{N},+,\cdot,0,1,<)$ を自然数論の標準構造とする．$A\subseteq\mathbf{N}^l$ が Σ_i 集合であるとは，Σ_i 論理式 $\varphi(x_1,\cdots,x_l)$ が存在して，以下が成り立つことである：

$$(m_1,\cdots,m_l)\in A\ \Leftrightarrow\ \mathfrak{N}\models\varphi(\bar{m}_1,\cdots,\bar{m}_l).$$

同様に $\mathfrak{N}$ の上で Π_i 論理式で表せる集合を Π_i といい，Σ_i 集合にも，Π_i 集合にもなるものを，Δ_i 集合という．

自然数の標準構造 $\mathfrak{N}=(\mathbf{N},+,\cdot,0,1,<)$ は $\mathrm{I}\Sigma_1$ のモデルでもあるから，

定理5.2.5を$\mathfrak{N}$の上で解釈すると，任意の原始再帰的関数のグラフがΔ_1集合になっていることがわかる．第2章の結果(系2.5.2)を用いれば，r.e.集合は原始再帰的関係の前に存在記号を付けて表すことができるので，それはΣ_1集合になる．逆に，Σ_1集合がr.e.集合になることは，Σ_0集合が原始再帰的であることからすぐ導ける．再帰的集合とΔ_1集合が一致することもこれより明らかである．よって，次を得る．

系 5.2.8　r.e.集合のクラスとΣ_1集合のクラスは一致し，再帰的集合のクラスとΔ_1集合のクラスは一致する．

次に，集合や関数が体系で表現可能であることを定義する．

定義 5.2.9　Tを言語$\mathcal{L}_R$もしくはその拡張における自然数論の公理系とする．集合$A \subseteq \mathbb{N}^l$がTにおいて**表現可能**(representable)であるとは，ある論理式 $\varphi(x_1, \cdots, x_l)$ が存在して，以下が成り立つことである：

$$(m_1, \cdots, m_l) \in A \Rightarrow T \vdash \varphi(\bar{m}_1, \cdots, \bar{m}_l),$$
$$(m_1, \cdots, m_l) \notin A \Rightarrow T \vdash \neg\varphi(\bar{m}_1, \cdots, \bar{m}_l).$$

また，関数 $f : \mathbb{N}^l \to \mathbb{N}$ がTにおいて(**強**)**表現可能**((strongly) representable)であるとは，$(l+1)$ 項関係 $f(x_1, \cdots, x_l) = y$ を表現する論理式 $\varphi(x_1, \cdots, x_l, y)$ が存在して，以下が成り立つことである： 任意の自然数 $m_1, \cdots, m_l$ について，

$$T \vdash \forall y \forall y' (\varphi(\bar{m}_1, \cdots, \bar{m}_l, y) \land \varphi(\bar{m}_1, \cdots, \bar{m}_l, y') \to y = y').$$

定理 5.2.10　任意の再帰的集合は，$Q_<$においてΣ_1論理式で表現可能である．

証明　任意の再帰的集合$A \subseteq \mathbb{N}^l$をとる．簡単のため$l = 1$，すなわち$A \subseteq \mathbb{N}$とすると，Σ_0論理式$\theta_1(x, y)$および$\theta_2(y, z)$があって，

$$n \in A \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \exists x\, \theta_1(x, \bar{n}) \text{ かつ } n \notin A \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \exists y\, \theta_2(y, \bar{n})$$

となる．(先頭の存在記号を1つにできることは，$\exists x_1 \cdots \exists x_l \theta \leftrightarrow \exists u \exists x_1 < u \cdots \exists x_l < u\, \theta$ からいえる．) いま $\varphi(z) \equiv \exists x\,(\theta_1(x, z) \wedge \forall y < x \neg \theta_2(y, z))$ とおく．A がこの Σ_1 論理式 φ によって表現されることを見る．まず，$n \in A$ の場合，明らかに $\mathfrak{N} \models \varphi(\bar{n})$ だから，$Q_<$ の Σ_1 完全性により $Q_< \vdash \varphi(\bar{n})$ となる．次に，$n \notin A$ とする．$\mathfrak{N} \models \forall x \neg \theta_1(x, \bar{n}) \wedge \exists y\, \theta_2(y, \bar{n})$ より，$m \in \mathbf{N}$ が存在し，$\mathfrak{N} \models \theta_2(\bar{m}, \bar{n}) \wedge \forall x \leq \bar{m} \neg \theta_1(x, \bar{n})$ である．これに $Q_<$ の Σ_1 完全性を適用し，$Q_< \vdash \theta_2(\bar{m}, \bar{n}) \wedge \forall x \leq \bar{m} \neg \theta_1(x, \bar{n})$ となる．したがって，$Q_< \vdash \theta_2(\bar{m}, \bar{n}) \wedge \forall x\,(\theta_1(x, \bar{n}) \rightarrow \bar{m} < x)$，さらに $Q_< \vdash \forall x\,(\theta_1(x, \bar{n}) \rightarrow \bar{m} < x \wedge \theta_2(\bar{m}, \bar{n}))$ となって，$Q_< \vdash \forall x\,(\theta_1(x, \bar{n}) \rightarrow \exists y < x\, \theta_2(y, \bar{n}))$ すなわち $Q_< \vdash \neg\varphi(\bar{n})$ を得る．　□

定理 5.2.11　再帰的(グラフをもつ)全域関数は，$Q_<$ において Σ_1 論理式で強表現可能である．

証明　再帰的全域関数 $f : \mathbf{N}^l \rightarrow \mathbf{N}$ が与えられたとし，それが $Q_<$ で強表現可能になることをまず示す．簡単のため $l = 1$ としておく．定理 5.2.10 から，$Q_<$ において $f(x) = y$ を表現する Σ_1 論理式 $\varphi(x, y)$ がある．そこで，

$$\chi(x, y) \equiv \varphi(x, y) \wedge \forall y' < y \neg \varphi(x, y')$$

とおく．χ は Σ_1 ではないが，f がこれによって強表現されることを見る．いま，$f(m) = n$ とする．このとき，$Q \vdash \chi(\bar{m}, \bar{n})$ は容易にわかる．次に，$\chi(\bar{m}, y) \wedge y \neq \bar{n}$ と仮定して，Q において矛盾を導く．$y < \bar{n}$ のとき，$\chi(\bar{m}, \bar{n})$ より $\neg\varphi(\bar{m}, y)$ となり，$\chi(\bar{m}, y)$ に矛盾する．$\bar{n} < y$ のとき，$\chi(\bar{m}, y)$ より $\neg\varphi(\bar{m}, \bar{n})$ となり，$\chi(\bar{m}, \bar{n})$ に矛盾する．したがって，Q において $\chi(\bar{m}, y) \rightarrow y = \bar{n}$ が示された．これは，$f(m) \neq n \Rightarrow Q \vdash \neg\chi(\bar{m}, \bar{n})$ と，$Q \vdash \exists ! y\, \chi(\bar{m}, y)$ を同時に意味しており，f は論理式 $\chi(x, y)$ によって強表現可能となる．

次に，f が Σ_1 論理式で強表現可能であることを示す．f を表現する Σ_1 論

理式を $\varphi(x, y) \equiv \exists z\, \theta(x, y, z)$ （θ は Σ_0）とする．そして，以下で定める $\psi(x, y, z)$ を用いて，$\chi'(x, y) \equiv \exists z\,(\psi(x, y, z))$ で定義される Σ_1 論理式が f を強表現することをいう．

$$\psi(x, y, z) = \theta(x, y, z) \wedge$$
$$\forall y' \leq y + z\, \forall z' \leq y + z\,(y' + z' < y + z \to \neg\theta(x, y', z')).$$

いま，$f(m) = n$ とし，$\theta(\bar{m}, \bar{n}, \bar{k})$ を成り立たせる最小の k を固定する．このとき，$\psi(\bar{m}, \bar{n}, \bar{k})$ も成り立つ．そして，$\psi(\bar{m}, y, z) \wedge y \neq \bar{n}$ を仮定し，$y + z \leq \bar{n} + \bar{k}$ と $\bar{n} + \bar{k} < y + z$ の場合に分けて矛盾を導き，上と同様に強表現可能性が示される．前者の場合，$y = \overline{n'} \neq \bar{n}$ として，$\varphi(\bar{m}, \overline{n'})$ が導けるので，$\varphi(x, y)$ が f を表現することに反する．後者の場合，$\psi(\bar{m}, y, z)$ の仮定から，$\neg\theta(\bar{m}, \bar{n}, \bar{k})$ となり，やはり矛盾である．　□

上の証明はかなり巧妙にできているので，前半と後半を見比べながらじっくり吟味してほしい．

5.3　第一不完全性定理

本節では，Gödel の第一不完全性定理とそのいくつかのバリエーションを証明する．この節を通して，すべての理論 T は言語 $\mathcal{L}_{\mathrm{OR}}$ で与えられており，$\mathrm{Q}_<$ を含むものとする．

定義 5.3.1　理論 T が，1-**無矛盾**(1-consistent)であるとは，任意の Σ_1 文 σ に対し，$T \vdash \sigma \Rightarrow \mathfrak{N} \models \sigma$ となるときをいう．

Q や PA など普通の算術理論は，標準構造 $\mathfrak{N}$ で真なるものだけを公理にしているので，当然 1-無矛盾である．1-無矛盾性は，無矛盾性より真に強い概念である．例えば，$\mathrm{Q} + \exists x\,(0 + x \neq x)$ （5.1 節の問題 1 を参照)は，無矛盾だが 1-無矛盾でない．（注．任意の φ について，$T \vdash \exists x\, \varphi(x) \Rightarrow$

$\exists n\, T \nvdash \neg\varphi(\bar{n})$ となるとき，T は **ω-無矛盾**(ω-consistent)という．容易にわかるように，ω-無矛盾性は 1-無矛盾性より強い概念であるが，$\mathfrak{N}$ の真偽を言及しない点が好まれ，かつては広く用いられていた．)

補題 5.3.2 T が 1-無矛盾であれば，任意の r.e. 集合 S に対し，ある Σ_1 論理式 $\varphi(x)$が存在して，$n \in S \Leftrightarrow T \vdash \varphi(\bar{n})$.

証明 前節の結果(系 5.2.8)より，r.e. 集合は $\mathfrak{N}$ 上において Σ_1 論理式 $\varphi(x)$ で表現できる．T は $\mathrm{Q}_<$ を含み，$\mathrm{Q}_<$ は Σ_1 完全(定理 5.1.8)だから，

$$\mathfrak{N} \models \varphi(\bar{n}) \Rightarrow \mathrm{Q}_< \vdash \varphi(\bar{n}) \Rightarrow T \vdash \varphi(\bar{n}).$$

また，T が 1-無矛盾だから，

$$T \vdash \varphi(\bar{n}) \Rightarrow \mathfrak{N} \models \varphi(\bar{n})$$

もいえる．よって，$n \in S \Leftrightarrow T \vdash \varphi(\bar{n})$. □

定義 5.3.3 理論 T が再帰的(原始再帰的／r.e. 等)であるとは，その公理のゲーデル数の集合 $\{\ulcorner\sigma\urcorner : \sigma \in T\}$ が再帰的(原始再帰的／r.e. 等)であることをいう．

数学に現れる公理的理論はたいてい有限か原始再帰的である．本章で導入された算術体系(PA, IΣ_1 など)は，すべて原始再帰的である．原始再帰的でない(r.e. でもない)理論の例として，$\mathfrak{N}$ で真となる文全体 $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ がある．

補題 5.3.4 T が r.e. 理論のとき，その定理のゲーデル数の集合 $\{\ulcorner\sigma\urcorner : T \vdash \sigma,\ \sigma$ は文である$\}$ も r.e. である．

証明 「証明」は原始再帰法で定義される(注．定義 3.2.3 においては，この事実は明確に述べられていないが，証明(木)の定義を厳密に与えるなら，それが原始再帰法によることは明らかであろう．) から，「P が有限集合 T' ($\subseteq T$) からの証明である」という主張は，P と T' のゲーデル数をそれぞれ p と t' として，原始再帰的述語 $\mathrm{Prf}(p, t')$ によって表される．したがっ

て，「σ が T の定理である」という主張は，$\exists p \exists t'$ (Prf(p, t') $\wedge$ p は σ の証明 P を表す $\wedge$ t' の各要素は T に属する) となり，T が r.e. なら，その全体は Σ_1 で表現できる．□

定理 5.3.5 (**Gödel の第一不完全性定理**(first incompleteness theorem)) T が 1-無矛盾な r.e. 理論であれば，$T \nvdash \sigma$ かつ $T \nvdash \neg\sigma$ となる文 σ が存在する．

証明　再帰的でない r.e. 集合 K をとる(補題 2.4.6)．T が 1-無矛盾なので，補題 5.3.2 から，ある Σ_1 論理式 $\varphi(x)$ が存在して，$n \in \mathrm{K} \Leftrightarrow T \vdash \varphi(\bar{n})$ となる．T は無矛盾だから，任意の n について $T \vdash \neg\varphi(\bar{n}) \Rightarrow T \nvdash \varphi(\bar{n}) \Rightarrow n \notin \mathrm{K}$ が成立する．もし任意の n についてこの逆も成り立つとすると，補題 5.3.4 から K の補集合も r.e. になってしまうので，ある n が存在して $n \notin \mathrm{K} \wedge T \nvdash \neg\varphi(\bar{n})$ となる．$n \notin \mathrm{K}$ は $T \nvdash \varphi(\bar{n})$ を意味するので，$\varphi(\bar{n})$ が題意を満たす文 σ となる．□

以下では，不完全性定理のいくつかのバリエーションを述べるが，なかでも重要な定理は Gödel の定理における 1-無矛盾性の仮定を単なる無矛盾性に弱めた Rosser の定理と Tarski の真理定義不可能性定理である．(第二不完全性定理は，付録 1 で扱う．)　それらについて述べる前に，上の定理に対し，再帰理論を使わない直接的な別の証明を与える．その核になるのが，次の補題である．

補題 5.3.6 (**対角化補題**(diagonal lemma)，**不動点補題**(fixed point lemma))　T を $\mathrm{Q}_<$ の任意の拡大とする．x のみを自由変数とする任意の論理式 $\psi(x)$ に対し，ある文 σ が存在して，$T \vdash \sigma \leftrightarrow \psi(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$ となる．(この σ を ψ の不動点と呼ぶ．)

証明　x のみを自由変数とする論理式を(原始)再帰的に $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots$

と並べ上げ，$f(n) = \ulcorner \varphi_n(\bar{n}) \urcorner$ とおくと，f は(原始)再帰的関数になる．したがって，定理 5.2.11 により，

$$f(m) = n \Rightarrow T \vdash \chi(\bar{m}, \bar{n}) \wedge \forall y \neq \bar{n} \neg \chi(\bar{m}, y)$$

となる Σ_1 論理式 χ が存在する．いま，論理式 $\exists y (\chi(x, y) \wedge \psi(y))$ を考えると，これは x のみを自由変数とする論理式なので，ある $\varphi_k(x)$ に数え上げられている．この k に対して $\sigma \equiv \varphi_k(\bar{k})$ とおくと，$f(k) = \ulcorner \sigma \urcorner$ なので，$T \vdash \chi(\bar{k}, \overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ となる．したがって，T において，

$$\psi(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}) \rightarrow \exists y \, (\chi(\bar{k}, y) \wedge \psi(y)) \; (\equiv \varphi_k(\bar{k}) \equiv \sigma)$$

である．他方，$T \vdash \forall y \neq \overline{\ulcorner \sigma \urcorner} \neg \chi(\bar{k}, y)$ だから，T において，

$$\begin{aligned} \neg \psi(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}) &\rightarrow \forall y \, (\neg \psi(y) \vee \neg \chi(\bar{k}, y)) \\ &\rightarrow \neg \exists y \, (\chi(\bar{k}, y) \wedge \psi(y)) \; (\equiv \neg \sigma) \end{aligned}$$

である．よって，σ は ψ の不動点となっている． □

不完全性定理を成り立たせる条件の1つに，理論 T が r. e. であることがあった．次の補題は簡単な事実であるが，大変有用である．

補題 5.3.7 (**Craig の補題**) r. e. 理論 T に対し，それと同等な(同じ定理を証明する)原始再帰的理論 T' が存在する．

証明 T を r. e. 理論として，それを表現する Σ_1 論理式を $\varphi(x) = \exists y \, \theta(x, y)$ (θ は Σ_0) とする．すなわち，$\sigma \in T \Leftrightarrow \mathfrak{N} \vdash \varphi(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$．そして，原始再帰的理論 T' を以下のように定義する：

$$T' = \{ \overbrace{\sigma \wedge \sigma \wedge \cdots \wedge \sigma}^{n+1\text{個}} : \mathfrak{N} \models \theta(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{n}) \}.$$

$\vdash \sigma \leftrightarrow \sigma \wedge \sigma \wedge \cdots \wedge \sigma$ であるから，T と T' は同等であり，T' は原始再帰的である． □

注．上の証明において，T' を Σ_0 であるとは結論付けられない．なぜなら，$\theta(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner}, \bar{n})$ の中のゲーデル数の扱いや，論理式の繰り返しなどは原始再帰的な作業であって，Σ_0 では容易に表せないからである．

この定理により，原始再帰的理論だけを扱っても，r.e. 理論についての結論を導けることになった．そこで，今後は原始再帰的理論 T についてのみ考えていく．

さて，「証明」は原始再帰法で定義されていたから，「論理式の有限列（もしくは有限木）P が T における証明である」という主張も原始再帰的になる．補題 5.3.4 の証明及びその注を参照．そこで，我々は次の定義をする．

定義 5.3.8 T を原始再帰的理論とする．原始再帰的な述語 Proof_T を以下のように定義する：

$$\mathrm{Proof}_T(\ulcorner P \urcorner, \ulcorner \sigma \urcorner) \ \Leftrightarrow\ P \text{ は，} T \text{ における論理式 } \sigma \text{ の証明である．}$$

多少乱暴ではあるが，Proof_T を $\mathrm{Q}_<$ において表現する $\mathbf{\Sigma}_1$ 論理式および $\mathbf{\Pi}_1$ 論理式を区別なく Proof_T と書くことにする．その上で，$\mathbf{\Sigma}_1$ 論理式 Bew_T を以下のように定める：

$$\mathrm{Bew}_T(x) \ \Leftrightarrow\ \exists y\, \mathrm{Proof}_T(y, x).$$

論理式 $\mathrm{Bew}_T(x)$ は，“x は T で証明可能な論理式のゲーデル数である”ことを表している．Bew は，独語の beweisbar（証明可能）からとっている．まず，1-無矛盾の仮定のまま，Gödel の定理を証明し直す．

第一不完全性定理の別証 対角化定理により，$\neg\mathrm{Bew}_T(x)$ の不動点 σ が存在する．つまり，$T \vdash \sigma \leftrightarrow \neg\mathrm{Bew}_T(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ となる．この σ が T で証明も反証もできないことが以下のようにしてわかる．

$T \vdash \sigma$ とすると，$\mathrm{Bew}_T(\ulcorner \sigma \urcorner)$ は真．つまり $\mathfrak{N} \models \mathrm{Bew}_T(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ である．よって $\mathbf{\Sigma}_1$ 完全性から $T \vdash \mathrm{Bew}_T(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$ となり，σ が $\neg\mathrm{Bew}_T(x)$ の不動点であることから $T \vdash \neg\sigma$ となって矛盾する．

他方，$T \vdash \neg\sigma$ とすると σ が不動点であることから $T \vdash \mathrm{Bew}_T(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$．ここで，$T$ の 1-無矛盾性を用いると，$\mathfrak{N} \models \mathrm{Bew}_T(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$，すなわち $T \vdash \sigma$ となって矛盾する．□

上の証明中の σ を**ゲーデル文**(Gödel sentence)という．$T \nvdash \sigma$ であるから $\mathfrak{N} \models \neg\mathrm{Bew}_T(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$ となり，また σ が T においての $\neg\mathrm{Bew}_T(x)$ の不動点であることから，$\mathfrak{N} \models T$ であれば，$\mathfrak{N} \models \sigma$ である．つまり，$\mathfrak{N}$ をモデルにもつような自然な体系のゲーデル文は「真なる Π_1 文」である．あとで述べるように(T が $\mathrm{I}\Sigma_1$ を含むなら)，ゲーデル文は T の無矛盾性を表す文と同値になる(補題 5.3.17)．

さて，Rosser は 1-無矛盾性の仮定なしに不完全性定理を証明するために，$\mathrm{Bew}_T(x)$ を次のように改良した．

$$\mathrm{Bew}^*_T(x) \equiv \exists y\,(\mathrm{Proof}_T(y, x) \wedge \forall z < y\, \neg\mathrm{Proof}_T(z, \neg x)).$$

但し $\neg x$ は，x が論理式 φ のコードであるときの $\neg\varphi$ のコードを意味する．

補題 5.3.9 T を $\mathrm{Q}_<$ の原始再帰的拡大とする．このとき，任意の文 σ について，

(1) $T \vdash \sigma \Rightarrow T \vdash \mathrm{Bew}^*_T(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$.

(2) $T \vdash \neg\sigma \Rightarrow T \vdash \neg\,\mathrm{Bew}^*_T(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$.

証明 T が矛盾していれば，補題は自明に成り立っているので，T は無矛盾と仮定する．また，(1) については，$T \vdash \sigma$ ならば，$\mathrm{Bew}^*_T(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$ が真となることは容易にわかるので，Σ_1 完全性より直ちにいえる．(2) を示すために，$T \vdash \neg\sigma$ と仮定する．すると，$n \in \mathbf{N}$ が存在して，

$$\mathrm{Proof}_T(\bar{n}, \overline{\ulcorner\neg\sigma\urcorner}) \wedge \forall z \leq \bar{n}\, \neg\mathrm{Proof}_T(z, \overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$$

が $\mathfrak{N}$ で真となる．Σ_1 完全性より，上式は T で証明可能である．そこで，T において，

$$\mathrm{Proof}_T(y, \overline{\ulcorner\sigma\urcorner}) \to (y > \bar{n} \to \exists z < y\, \mathrm{Proof}_T(z, \overline{\ulcorner\neg\sigma\urcorner}))$$

となる．すなわち，T において，

$$\forall y\,(\neg\mathrm{Proof}_T(y, \overline{\ulcorner\sigma\urcorner}) \vee \exists z < y\, \mathrm{Proof}_T(z, \overline{\ulcorner\neg\sigma\urcorner}))$$

が証明できることになり，$T \vdash \neg\mathrm{Bew}^*_T(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$ となる． □

$\neg\mathrm{Bew}^*_T(x)$ に対する不動点，つまり $T \vdash \sigma \leftrightarrow \neg\mathrm{Bew}^*_T(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$ なる文 σ を**ロッサー文**(Rosser sentence)という．

定理 5.3.10 (Gödel-Rosser)　T が $\mathrm{Q}_<$ の無矛盾な r.e. 拡大であれば，$T \nvdash \sigma$ かつ $T \nvdash \neg\sigma$ となる文 σ が存在する．

証明　Craig の補題 5.3.7 により，T を $\mathrm{Q}_<$ の無矛盾な原始再帰的拡大としてよい．σ をそのロッサー文とする．$T \vdash \sigma$ ならば，補題 5.3.9 より $T \vdash \mathrm{Bew}^*_T(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$ だから，不動点 σ の定義より $T \vdash \neg\sigma$ となり，T は矛盾する．逆に，$T \vdash \neg\sigma$ ならば，補題 5.3.9 より $T \vdash \neg\mathrm{Bew}^*_T(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$ だから，不動点 σ の定義より $T \vdash \sigma$ となり，やはり T は矛盾する．　□

さらにいくつか対角化補題の応用を見る．

補題 5.3.11　T を $\mathrm{Q}_<$ の無矛盾な拡大とする．任意の文 σ に対して，$T \vdash \sigma \leftrightarrow \psi(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$ となるような論理式 $\psi(x)$ はない．

証明　そのような $\psi(x)$ があったとすると，$\neg\psi(x)$ に対する不動点 σ を代入してみれば，明らかに矛盾である．　□

上の補題において，T として，$\mathfrak{N}$ で真となる文全体 $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ を考えれば，次の定理が得られる．

定理 5.3.12 (**Tarski の真理定義不可能性**(undefinability of truth))　任意の文 σ に対して，$\mathfrak{N} \models \sigma \leftrightarrow \psi(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$ となるような論理式 $\psi(x)$ はない．

補題 5.3.13　T を $\mathrm{Q}_<$ の無矛盾な拡大とする．任意の文 σ について，

$$T \vdash \sigma \Rightarrow T \vdash \psi(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}),$$
$$T \nvdash \sigma \Rightarrow T \vdash \neg\psi(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$$

となるような論理式 $\psi(x)$ はない．

証明 そのような $\psi(x)$ があったとすると，$\neg\psi(x)$ に対する不動点 σ をとり，Gödel-Rosser の不完全性定理の証明と同様に矛盾が導かれる． □

補題 5.3.14 T を $Q_<$ の無矛盾な拡大とする．その定理のゲーデル数の集合 $\{\ulcorner\sigma\urcorner : T\vdash\sigma,\ \sigma$ は文である$\}$ は再帰的でない．

証明 T の定理の集合が再帰的であれば，前節の結果より $Q_<$ で表現可能になり，すなわち上の補題の $\psi(x)$ が存在することになる． □

定理 5.3.15 (**Churchの述語論理決定不可能性**(undecidability of predicate calculus)) 言語 $\mathcal{L}_{\mathrm{OR}}$ (または $\mathcal{L}_{\mathrm{R}}$) において，述語論理の公理だけから証明できる文のゲーデル数の集合 $\{\ulcorner\sigma\urcorner : \vdash\sigma,\ \sigma$ は文である$\}$ は再帰的でない．

証明 $Q_<$ の公理をすべて $\wedge$ でつないで，1つの文にしたものを ξ とおく．演繹定理から $Q\vdash\sigma \Leftrightarrow \vdash\xi\to\sigma$ であるから，$\{\ulcorner\sigma\urcorner : \vdash\sigma\}$ が再帰的であれば，$\{\ulcorner\sigma\urcorner : \vdash\xi\to\sigma\} = \{\ulcorner\sigma\urcorner : Q\vdash\sigma\}$ も再帰的になり，上の補題 5.3.14 に反する． □

付録 第二不完全性定理

Gödel の第一不完全性定理は，ペアノ算術などの公理系 T に対して証明も反証もできない文の存在を示したものだが，第二不完全性定理は，「T が無矛盾である」という具体的な意味をもつ文が T で証明できないことを主張する．第二定理の証明は，第一定理の証明を体系 T 内で形式化することによって得られるのだが，それは非常に精緻な議論を要するので，厳密な証明は他書(例えば，文献 [田 1])に譲り，ここで証明の要点を押さえておくだけでも有意義であろう．

第一定理は，足し算と掛け算が普通に定義されていればどんな算術体系でも成り立ったが，第二定理の方はある程度の帰納法を要する．帰納法をどこまで弱められるかという最近の研究もあるのだが，ここでは T を $\mathrm{I}\Sigma_1$ を含む無矛盾な r.e. 理論として議論する．まず，次の補題が成り立つ．

補題 5.3.16 (Hilbert-Bernays-Löb)

D1. $T \vdash \varphi \Rightarrow T \vdash \mathrm{Bew}_T(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner})$.

D2. $T \vdash \mathrm{Bew}_T(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner}) \wedge \mathrm{Bew}_T(\overline{\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner}) \to \mathrm{Bew}_T(\overline{\ulcorner \psi \urcorner})$.

D3. $T \vdash \mathrm{Bew}_T(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner}) \to \mathrm{Bew}_T(\overline{\ulcorner \mathrm{Bew}_T(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner}) \urcorner})$.

D1は，$\mathrm{Bew}_T(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner})$ が Σ_1 論理式であることに注目し，Σ_1 完全性から直ちに得られる．D2については，φ の証明と $\varphi \to \psi$ の証明を三段論法でつないだものが ψ の証明であることから明らか．最後に，D3はD1を T で形式化したものにすぎないが，その形式化の実行が難しい．T を $\mathrm{I}\Sigma_1$ や PA として，D3を証明するには，T における φ の証明から $\mathrm{Bew}_T(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner})$ の証明を求める操作を原始再帰的あるいは算術的な手続きとして表さなければならない．別法として，完全性定理を算術的に表現し，任意の算術的に表現されたモデルでD3の主張が成り立つことを確かめるという方法もある．算術化された完全性定理を応用した第二定理の証明には，他にもいろいろなバリエーションが知られている(文献 [田1], [菊池])．

さて，π_G をゲーデル文とする．つまり，

$$T \vdash \pi_G \leftrightarrow \neg \mathrm{Bew}_T(\overline{\ulcorner \pi_G \urcorner})$$

が成り立っている．5.3節では，これが T で証明も反証もできない文であることを示した．そして，いま

$$\mathrm{Con}(T) \equiv \neg \mathrm{Bew}_T(\overline{\ulcorner 0 = 1 \urcorner})$$

とおく．$\mathrm{Con}(T)$ は“T が無矛盾(consistent)であること”を意味している．

補題 5.3.17 $T \vdash \mathrm{Con}(T) \leftrightarrow \pi_G$.

証明 最初に，$\mathrm{Con}(T) \to \pi_G$ を示す．まず，$T \vdash \neg \pi_G \leftrightarrow \mathrm{Bew}_T(\overline{\ulcorner \pi_G \urcorner})$ とD1より，

$$T \vdash \mathrm{Bew}_T(\overline{\ulcorner \mathrm{Bew}_T(\overline{\ulcorner \pi_G \urcorner}) \to \neg \pi_G \urcorner}).$$

これにD2を用いて，

$$T \vdash \mathrm{Bew}_T(\overline{\ulcorner \mathrm{Bew}_T(\overline{\ulcorner \pi_G \urcorner}) \urcorner}) \to \mathrm{Bew}_T(\overline{\ulcorner \neg \pi_G \urcorner}).$$

D3より，$T \vdash \mathrm{Bew}_T(\overline{\ulcorner \pi_G \urcorner}) \to \mathrm{Bew}_T(\overline{\ulcorner \mathrm{Bew}_T(\overline{\ulcorner \pi_G \urcorner}) \urcorner})$ だから，

$$T \vdash \mathrm{Bew}_T(\overline{\ulcorner \pi_G \urcorner}) \to \mathrm{Bew}_T(\overline{\ulcorner \neg \pi_G \urcorner}).$$

$T \vdash \pi_G \to (\neg \pi_G \to 0 = 1)$ とD2を用いて，上のことから

$$T \vdash \mathrm{Bew}_T(\overline{\ulcorner \pi_G \urcorner}) \to \mathrm{Bew}_T(\overline{\ulcorner 0=1 \urcorner})$$

を得る．対偶をとって，

$$T \vdash \neg\mathrm{Bew}_T(\overline{\ulcorner 0=1 \urcorner}) \to \neg\mathrm{Bew}_T(\overline{\ulcorner \pi_G \urcorner}),$$

すなわち，$T \vdash \mathrm{Con}(T) \to \pi_G$ が示された．

逆は簡単である．$T \vdash 0=1 \to \pi_G$ だから，D1とD2によって，

$$T \vdash \mathrm{Bew}_T(\overline{\ulcorner 0=1 \urcorner}) \to \mathrm{Bew}_T(\overline{\ulcorner \pi_G \urcorner}).$$

対偶をとって，$T \vdash \pi_G \to \mathrm{Con}(T)$ を得る． □

定理 5.3.18 (**Gödel の第二不完全性定理**(second incompleteness theorem))

$$T \nvdash \mathrm{Con}(T).$$

証明 第一不完全性定理により，$T \nvdash \pi_G$．補題5.3.17によって $T \vdash \mathrm{Con}(T) \leftrightarrow \pi_G$ だから，$T \nvdash \mathrm{Con}(T)$． □

第一不完全性定理は証明可能性の限界を示したという意味でネガティブな結果なのに対し，第二定理は $\mathrm{Con}(T)$ という具体的命題が T では証明できないことを示しており，少なくとも応用面ではかなりポジティブな成果である．例えば，2つの公理系が相異なることを示す常套手段は，一方において他方の無矛盾性を証明することである．また，1977年の Paris と Harrington の仕事以降，ペアノ算術などの公理系 T に対して，$\mathrm{Con}(T)$ 以外の独立命題も多数発見されている(文献[田1])．

問題 4 自分自身が矛盾すること ($\neg\,\mathrm{Con}(T)$) を証明する無矛盾な算術の公理系 T を作れ．

5.4 プレスバーガー算術と量化記号消去

前節では，ペアノ算術PAとその部分体系について，不完全性や決定不可能性を見た．本節では，ペアノ算術から掛け算を取り除いた公理系(プレスバーガーの体系)が完全で，そして決定可能になることを見る．ここで証明

に用いる“量化記号の消去 (quantifier elimination)”と呼ばれる手法は，後の章でも使われる強力な手段である．

まず，理論の完全性や決定可能性に対し，改めて定義を与える．

定義 5.4.1 T を言語 $\mathcal{L}$ の理論とする．T が**完全**(complete)であるとは，$\mathcal{L}$ のあらゆる文 σ について，$T \vdash \sigma$ または $T \vdash \neg\sigma$ が成立するときをいう．T が**決定可能**(decidable) であるとは，$T \vdash \sigma$ か $T \nvdash \sigma$ かが有限的な手段で判定できるとき，より正確には，集合 $\{\ulcorner\sigma\urcorner : T \vdash \sigma\}$ が再帰的であるときをいう．

T の決定可能性を議論する際，記号集合 $\mathcal{L}$ が可算であることは暗黙の了解である．理論 T が r. e. とか再帰的であるというのは，集合 $\{\ulcorner\sigma\urcorner : \sigma \in T\}$ が r. e. や再帰的なことであったが，その場合も言語は可算である．次の事実は「完全性」と「決定可能性」との基本的な関係を示すものである．

補題 5.4.2 完全な r. e. 理論 T は，決定可能である．

証明 もしも T が矛盾していればすべての文が証明できるから決定可能である．よって，T は無矛盾とする．T が r. e. だから，T の定理(のコード)の集合も r. e.，つまりすべての定理を再帰的に並べ上げることができる．T は完全だから，任意の命題 σ について，σ か $\neg\sigma$ のどちらかは上の並べ上げに出てくることになる．T の無矛盾性から $T \vdash \neg\sigma$ は $T \nvdash \sigma$ を意味している．つまり，$T \vdash \sigma$ か $T \nvdash \sigma$ を，(σ と $\neg\sigma$ のどちらが先に並べられるかを調べることによって)有限時間内に判定できることになる． □

数学の殆どの公理系は r. e. 理論だから，その決定可能性を調べるためには完全をいえばよいことがわかる．しかし，不完全でも決定可能になる r. e. 理論はたくさんある．(例．アーベル群の理論)

定義 5.4.3 T を言語 $\mathcal{L}$ の理論とする．T で**量化記号が消去できる**(T admits elimination of quantifier)とは，言語 $\mathcal{L}$ の任意の論理式 φ に対し，ある開論理式(量化記号のない論理式) ψ が存在して，$T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ となることをいう．

量化記号が消去できる理論では，どの論理式も「原子論理式を $\neg, \wedge, \vee$ で結合させた」形に直せるので，その真偽を判定するのは比較的容易である．但し，原子論理式の真偽がいつも再帰的に判定できるわけではなく，複雑な原子論理式をたくさん追加すれば，どの理論も量化記号消去可能な理論に修正することができる．すなわち，次の補題が成り立つ．

補題 5.4.4 任意の理論は，量化記号消去可能な保存的拡大理論をもつ．

証明 T を言語 $\mathcal{L}$ の理論とする．$\mathcal{L}$ のすべての論理式 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ に対し，新しい n 項関係記号 R_φ を用意し，

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n\ (R_\varphi(x_1, \cdots, x_n) \leftrightarrow \varphi(x_1, \cdots, x_n))$$

の形の文をすべて T に加えた理論を T' とする．T' は，定義による拡大であるから，保存的拡大になっている．そして，拡張言語の論理式 ψ' は，それに含まれる各々の関係記号 R_φ を φ に置き換えることで，T' において同値となる言語 $\mathcal{L}$ の論理式 ψ になる．したがって，ψ' は原子式 R_ψ と T' において同値である． □

問題 5 任意の理論は，量化記号消去可能な $\forall\exists$ 理論を保存的拡大にもつことを示せ．

以下の補題は，量化記号の消去ができることを調べるための基本的手段である．

補題 5.4.5 T を言語 $\mathcal{L}$ の任意の理論とする．T において，「自由変数 x をもつ原子論理式またはその否定 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ に対し，ある開論理式 φ が

存在して，$T \vdash \varphi \leftrightarrow \exists x\,(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n)$」が成り立てば，$T$ において量化記号が消去できる．さらに，原子論理式の否定が，否定を用いない開論理式と同値になる場合には，自由変数 x をもつ原子論理式を連言記号 $\wedge$ でつないだ論理式の前に $\exists x$ が付いた論理式が開論理式で表せさえすれば，任意の論理式の量化記号が消去できる．

証明　最初に，$\exists x\,\theta$ (θ は開論理式) の形の論理式が開論理式と同値になることをいえば，任意の論理式の量化記号が消去できることをいう．まず，任意に論理式が与えられたとき，$\forall x\,\varphi \equiv \neg \exists x \neg \varphi$ によって全称記号 $\forall$ をすべて消去する．できた論理式が存在記号 $\exists$ を含んでいれば，必ず $\exists x\,\theta$ (θ は開論理式) の形の部分論理式を含むので，その部分をそれと同値な開論理式に置き換える(補題 3.4.5)．そうして作られた論理式は，$\exists$ が1つ少ないものになるので，この操作を繰り返して存在記号 $\exists$ を減らしてゆけば，最終的にもとの論理式と同値な開論理式が得られる．

次に，開論理式 θ は，原子論理式またはその否定 $\alpha_{i,j}$ を用いて，次のような**選言標準形**(disjunctive normal form)

$$(\alpha_{1,1} \wedge \alpha_{1,2} \wedge \cdots \wedge \alpha_{1,k_1}) \vee (\alpha_{2,1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{2,k_2}) \vee \cdots \vee (\alpha_{m,1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{m,k_m})$$

に表される(同値になる)ことを見る．このように表せる開論理式全体を F とおく．F が選言記号 $\vee$ で閉じていることは自明である．$\wedge$ について閉じていることは，分配則(例．$(\alpha_1 \vee \alpha_2) \wedge \beta \leftrightarrow (\alpha_1 \wedge \beta) \vee (\alpha_2 \wedge \beta)$)による．否定記号についても，ド・モルガン則(3.2 節)と分配則からいえる．したがって，F はすべての開論理式を含む．

最後に，

$$\exists x\,((\alpha_{1,1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{1,k_1}) \vee (\alpha_{2,1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{2,k_2}) \vee \cdots \vee (\alpha_{m,1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{m,k_m}))$$
$$\leftrightarrow \exists x\,(\alpha_{1,1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{1,k_1}) \vee \cdots \vee \exists x\,(\alpha_{m,1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{m,k_m})$$

であるから，各部分 $\exists x\,(\alpha_{i,1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{i,k_i})$ が開論理式と同値になれば，全体も開論理式と同値になる．もし，$\alpha_{i,1}$ が自由変数 x をもたなければ，$\exists x$

$(\alpha_{i,1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{i,k_i}) \leftrightarrow \alpha_{i,1} \wedge \exists x\,(\alpha_{i,2} \wedge \cdots \wedge \alpha_{i,k_i})$ のようにそれを $\exists x$ の外に移動させることができるので，どの $\alpha_{i,j}$ も自由変数 x を含むとしてよい．つまり，自由変数 x をもつ原子論理式またはその否定を連言記号 $\wedge$ でつないだ論理式の前の $\exists x$ が消去できるなら，任意の論理式の量化記号が消去できることが示せた．

さらに，任意の原子論理式の否定が，否定を含まない開論理式と同値になるような理論を考える．このとき，任意の開論理式は，否定を含まない開論理式と同値になるから，それを分配法則等で変形すれば，否定を含まない選言標準形が得られる．あとは，上と同様な議論により，自由変数 x をもつ原子論理式を連言記号 $\wedge$ でつないだ論理式の前の $\exists x$ が消去できるなら，任意の論理式の量化記号が消去できることが示せる． □

量化記号の消去可能な理論の例として，自然数上の不等式の理論 $\mathrm{T}_<$ について考える．これは，ペアノ算術から演算 $+, \cdot$ に関する公理 A 3～A 6 を除いて作られるが，足し算 $+$ がないので，不等号 $<$ の性質を記述するために後続関数 $\mathrm{S}(x) = x + 1$ を用いる．

定義 5.4.6 理論 $\mathrm{T}_<$ は，定数記号 0，1 変数関数記号 S および 2 項関係 $<$ からなる言語 $\mathcal{L}_<$ をもち，以下の公理(厳密には，下の各論理式を適当な全称記号で束縛して，文に直したもの)で構成される．

S 1. $\mathrm{S}(x) \neq 0$.

S 2. $\mathrm{S}(x) = \mathrm{S}(y) \rightarrow x = y$.

S 7. $x \not< 0$.

S 8. $x < \mathrm{S}(y) \leftrightarrow x < y \vee x = y$.

S 9. $\varphi(0) \wedge \forall x\,(\varphi(x) \rightarrow \varphi(\mathrm{S}(x))) \rightarrow \forall x\,\varphi(x)$，但し，$\varphi(x)$ は任意の $\mathcal{L}_<$-論理式で，x 以外に自由変数を含んでいてよい．

補題 5.4.7　理論 $\mathrm{T}_<$ において以下が証明できる．

$<$ は線形順序：　$x<y \vee x=y \vee y<x$；　$x<y \to y \not< x$；

$(x<y \wedge y<z) \to x<z$.

S 10.　$y \neq 0 \to \exists x\,(\mathrm{S}(x)=y)$.

証明は，演習問題とする．（ヒント．まず x についての帰納法で $0<\mathrm{S}(x)$，y についての帰納法で $x<y \to \mathrm{S}(x)<\mathrm{S}(y)$ を示しておく．これらを用いて，x についての帰納法で $x<y \vee x=y \vee y<x$ を導く．また，z についての帰納法で $x<y \wedge y<z \to x<z$ が証明できる．次に帰納法で $\mathrm{S}(x) \neq x$ を示し，さらに帰納法で $x \not< x$ を示すと，$x<y \to y \not< x$ を得る．S 10 は y についての帰納法で容易に示せる．）

定義 5.4.8　理論 $\mathrm{T}^-_<$ を，$<$ の線形順序性 + S 7 + S 8 + S 10 とおく．

定義から明らかなように，$\mathrm{T}^-_<$ は $\mathrm{T}_<$ の部分体系で，しかも有限個の公理からなる．したがって，両者の関係は PA と PA^- の関係に類似しているが，これから示すように $\mathrm{T}_<$ と $\mathrm{T}^-_<$ は一致する．我々は，$\mathrm{T}^-_<$ において量化記号が消去可能であることを示し，それから $\mathrm{T}^-_<$ が完全であることを導く．その結果として $\mathrm{T}_<$ が $\mathrm{T}^-_<$ と一致することがわかる．

まず，簡単な事実として次の補題が成り立つことを注意しておく．

補題 5.4.9　理論 $\mathrm{T}^-_<$ において以下が証明できる．

S 1, S 2 および，

S 11.　$\mathrm{S}^n(x) \neq x$　（$\mathrm{S}^n(x)$ は $\overbrace{\mathrm{S}(\mathrm{S}(\cdots(\mathrm{S}}^{\mathrm{S}\text{が}\,n\,\text{個}}(x))\cdots))$ を表す．$n>0$.）

定理 5.4.10　理論 $\mathrm{T}^-_<$ において，量化記号が消去できる．

証明　補題 5.4.5 を使うために，まず理論 $\mathrm{T}^-_<$ における原子論理式の否定が否定を含まない開論理式で表せることを見る．原子論理式には，

$\mathrm{S}^m(u)=\mathrm{S}^n(v)$　と　$\mathrm{S}^m(u)<\mathrm{S}^n(v)$　（u, v は，定数 0 または変数）

の2つの形がある．それらの否定であるが，

$$S^m(u) \neq S^n(v) \leftrightarrow (S^m(u) < S^n(v)) \vee (S^n(v) < S^m(u)),$$

$$S^m(u) \not< S^n(v) \leftrightarrow (S^m(u) = S^n(v)) \vee (S^n(v) < S^m(u))$$

が $<$ の線形性から直ちに証明できる．したがって，自由変数 x をもつ原子論理式 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ に対し，

$$T_<^- \vdash \varphi \leftrightarrow \exists x\,(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_k)$$

となる開論理式 φ があることをいえば，補題5.4.5(の証明)より $T_<^-$ において量化記号が消去できる．

自由変数 x をもつ原子論理式のうち，$S^m(x) = S^n(x)$ と $S^m(x) < S^n(x)$ は x の値によらず，m, n の大小関係のみで真偽が決定される．もう少し正確にいえば，これらはそれぞれ文 $S^m(0) = S^n(0)$ と $S^m(0) < S^n(0)$ に同値となることが $T_<^-$ で証明できる．したがって，量化記号消去を考える際の原子論理式 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ は，3つの形

$$S^m(x) = S^n(u),\ \ S^m(x) < S^n(u),\ \ S^m(u) < S^n(x)$$

（u は，0 または x 以外の変数）

のいずれかであると仮定してよい．

まず，原子論理式 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ が等式を含む場合を考える．簡単のため，α_1 が $S^m(x) = S^n(u)$ であると仮定する．各 $i > 1$ に対し，α_1 の下で α_i と同値になる α_i' を以下のように定義する．$\alpha_i \equiv S^l(x) \lesseqgtr S^{l'}(v)$（$\lesseqgtr$ は $=, <$ または $>$）のとき，α_i は $S^{l+m}(x) \lesseqgtr S^{l'+m}(v)$ と同値だから，α_1 の下では $S^{l+n}(u) \lesseqgtr S^{l'+m}(v)$ と同値となり，これを α_i' とする．α_i' は，自由変数 x をもたないから，

$$T_<^- \vdash \exists x\,(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_k) \leftrightarrow S^m(0) < S^{n+1}(u) \wedge \alpha_2' \wedge \cdots \wedge \alpha_k'$$

となって，量化記号が消去される．

次に，すべての α_i が $S^m(u) < S^n(v)$（u か v の一方が x である）の形をしているときを考えよう．このとき，$\exists x\,(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_k)$ は，

$$\exists x \bigwedge_{i,j} (s_i < S^{m_i}(x) \wedge S^{n_j}(x) < t_j)$$

と表せる．ここで，s_i, t_j は，x を含まない項である．すると，上式は

$$\exists x \bigwedge_{i,j}(\mathrm{S}^{n_j}(s_i) < \mathrm{S}^{m_i+n_j}(x) < \mathrm{S}^{m_i}(t_j))$$

と同値で，さらに

$$(\bigwedge_{i,j}(\mathrm{S}^{n_j+1}(s_i) < \mathrm{S}^{m_i}(t_j)) \wedge \bigwedge_{j}\mathrm{S}^{n_j}(0) < t_j)$$

と同値になり，これは開論理式であるから量化記号が消去できた． □

系 5.4.11 理論 $\mathrm{T}^-_<$ は完全である．よって，決定可能である．

証明 上の定理から，この言語における任意の文は，$\mathrm{S}^m(0) = \mathrm{S}^n(0)$ や $\mathrm{S}^m(0) < \mathrm{S}^n(0)$ の形の論理式を $\wedge$ や $\vee$ で有限個つなげた文と同値になる．明らかに $m = n \Leftrightarrow \mathrm{T}^-_< \vdash \mathrm{S}^m(0) = \mathrm{S}^n(0)$ および $m \neq n \Leftrightarrow \mathrm{T}^-_< \vdash \mathrm{S}^m(0) \neq \mathrm{S}^n(0)$ であるから，$\mathrm{T}^-_< \vdash \mathrm{S}^m(0) = \mathrm{S}^n(0)$ か $\mathrm{T}^-_< \vdash S^m(0) \neq \mathrm{S}^n(0)$ の一方は成り立つ．同様に，$\mathrm{T}^-_< \vdash \mathrm{S}^m(0) < \mathrm{S}^n(0)$ か $\mathrm{T}^-_< \vdash \mathrm{S}^m(0) \not< \mathrm{S}^n(0)$ の一方も成り立つ．したがって，$\mathrm{S}^m(0) = \mathrm{S}^n(0)$ や $\mathrm{S}^m(0) < \mathrm{S}^n(0)$ の形の論理式を $\wedge$ や $\vee$ で有限個つなげた文についても，それ自身かその否定が $\mathrm{T}^-_<$ で証明でき，ひいては，任意の文について，それ自身かその否定が $\mathrm{T}^-_<$ で証明できる．つまり，$\mathrm{T}^-_<$ は完全である．それが決定可能であることは，この理論が r.e. であることと補題 5.4.2 による． □

理論 $\mathrm{T}^-_<$ の定理全体が再帰的であるというのが上の系の主張であるが，実は原始再帰的であることもいえる．理論 $\mathrm{T}^-_<$ において，任意の論理式をそれと同値な開論理式に変形する操作は原始再帰的であることが，上の定理の証明よりわかる．さらに，開文の真偽判定は原始再帰的にできるので，任意の文が $\mathrm{T}^-_<$ で証明できるか否かも原始再帰的にできるのである．

系 5.4.12 理論 $\mathrm{T}^-_<$ と理論 $\mathrm{T}_<$ は一致する．したがって，理論 $\mathrm{T}_<$ も，量化記号消去可能，完全，決定可能である．

証明 理論 $\mathrm{T}_<$ の定理 σ で理論 $\mathrm{T}^-_<$ で証明できないものがあったとすれ

ば，$T_<^-$ は完全であるから $\neg\sigma$ を証明する．しかし，$T_<^-$ は $T_<$ の部分体系であるから，$T_<$ は $\neg\sigma$ も証明することになって矛盾する．$T_<$ は自然数論の標準構造をモデルにもつので，これは不合理である．□

問題 6　理論 T_S は定数記号 0 と 1 変数関数記号 S のみからなる言語 $\mathcal{L}_S$ をもち，上で述べた S 1, S 2, S 10, S 11 を公理とする．この理論が，量化記号消去可能，完全，決定可能であることを示せ．

次に，$T_<^-$ に足し算を加えたプレスバーガーの体系を定義する．

定義 5.4.13　プレスバーガー算術(Presburger arithmetic) T_+ は，次の公理からなる $\mathcal{L}_+ = (+, 0, 1, <)$ の理論である．

A 1.　$\neg(x + 1 = 0)$.

A 2.　$x+1 = y+1 \rightarrow x = y$.

A 3.　$x + 0 = x$.

A 4.　$x + (y + 1) = (x + y) + 1$.

A 7.　$\neg(x < 0)$.

A 8.　$x < y+1 \leftrightarrow x < y \vee x = y$.

A 9.　$\varphi(0) \wedge \forall x\,(\varphi(x) \rightarrow \varphi(x+1)) \rightarrow \forall x\,\varphi(x)$，但し $\varphi(x)$ は任意の $\mathcal{L}_+$-論理式で，x 以外にも自由変数を含んでいてよい．

問題 7　理論 T_+ において，次が証明可能であることを調べよ．

（1）　＋に関する可換モノイドの公理

（2）　差の公理 $x < y \rightarrow \exists z\,(z + x + 1 = y)$

（3）　0 を最小元とする離散的線形順序の公理

（4）　演算の順序保存性 $x < y \rightarrow x + z < y + z$

（5）　$\forall x\, \exists y\, \exists r < n\,(x = \overbrace{y + \cdots + y}^{n\text{個}} + r)$，$n > 0$ は任意の自然数．

以下の議論は，上の問題の (1)～(5) を公理とする理論についても成り立

つ．したがって，T_+ と (1)～(5) は同等になることもいえるが，その詳しい議論は読者に委ねる．

さて，理論 T_+ は，この言語のままでは量化記号消去可能にはならない．例えば，“x は偶数である” という意味の論理式 $\exists y\,(x = y + y)$ を，開論理式で置き換えることは一見して難しそうである．そこで，各自然数 m に対して，次の関係 $\equiv_m$ を導入する：

$$x \equiv_m y \Leftrightarrow \exists w\,(x = \overbrace{w + \cdots + w}^{m\text{個}} + y).$$

これによって拡張された言語と理論をそれぞれ $\mathcal{L}_{+,\equiv}$ と $\mathrm{T}_{+,\equiv}$ と表す．我々は，$\mathrm{T}_{+,\equiv}$ において，量化記号が消去可能になることを示す．

定理を述べる前に，さらに二，三の便宜的な記法を導入する．これらは，新しい記号の定義というより，単なる略記である．まず，$\overbrace{u + \cdots + u}^{k\text{個}}$ を ku と書く（掛け算が導入されたわけではない！）．特に，$k1$ は k とも書く（以前には，$\overline{k}$ と書いた）．さらに，引き算 $-$ を使う．例えば，$s_1 - s_2 < t_1 - t_2$ のような表現を用いるが，これは形式的には $s_1 + t_2 < t_1 + s_2$ を表すものとする．例えば，$x \equiv_m y$ は $\exists w\,(x - y = mw)$ と表せる．

定理 5.4.14　理論 $\mathrm{T}_{+,\equiv}$ において，量化記号が消去できる．

証明　まず，理論 $\mathrm{T}_{+,\equiv}$ において，原子論理式の否定が否定を含まない開論理式で表せることを見る．原子論理式には，$s = t$, $s < t$ そして $s \equiv_m t$ の3つの形がある．それらの否定であるが，

$$s \neq t \leftrightarrow s < t \vee t < s,$$

$$s \not< t \leftrightarrow s = t \vee t < s,$$

$$s \not\equiv_m t \leftrightarrow s + 1 \equiv_m t \vee \cdots \vee s + (m-1) \equiv_m t$$

が $\mathrm{T}^{-}_{<}$ において簡単に証明できる．したがって，自由変数 x をもつ原子論理式 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_l$ が任意に与えられたとして，ψ を $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_l$ とおき，

$\exists x\,\psi$ と T で同値になる開論理式 φ があることをいえば，$\mathrm{T}_{+,\equiv}$ において量化記号が消去できる．

原子論理式 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_l$ を少し見やすく変形すると，次のような4つの形ができる．

$$nx = t, \quad nx < t, \quad nx > t, \quad nx \equiv_m t.$$

ここで，$n > 0$ であり，t は x を含まない項である．等式や不等式の両辺に正の数を掛けても，$\mathrm{T}_{+,\equiv}$ において同等な式になるから，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_l$ に含まれる各等式や不等式における x の係数 n (形式的には，x の出現回数)はすべて等しいと仮定してよい．そうすると，各式において $y = nx$ と置き換えて，全体の連言で x が存在するという代わりに，y が存在するという主張に直す．このとき，置換 $y = nx$ の潜在条件として，$y \equiv_n 0$ を連言の原子論理式に追加する必要がある．

以上の考察に基づき，(変数 y を再び x と改め)扱う原子論理式 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots,$ α_l は，次のどれかの形であると仮定できる．

$$x = t, \quad x < t, \quad x > t, \quad x \equiv_m t.$$

さらに，もし等式 $x = t$ がそのなかに現れているなら，その等式を $t+1 > 0$ で置き換え，それ以外の式の x を t で置き換えれば，x を含まないで同値な連言が得られるので，その前の $\exists x$ も消すことができる．よって，原子論理式 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_l$ は，次のどれかであると仮定する．

$$x < t, \quad x > t, \quad x \equiv_m t.$$

すなわち，

$$\exists x \left(\bigwedge_i r_i < x \wedge \bigwedge_j x < s_j \wedge \bigwedge_k x \equiv_{m_k} t_k\right)$$

が開論理式と同値になることをいう．以下の作業において，$x \geq 0$ の条件を見失わないようにするため，ある i について $r_i = 0 - 1$ であると仮定しておく．

$\bigwedge_k x \equiv_{m_k} t_k$ が含まれない場合，上の式は開論理式

$$\bigwedge_{i,j} r_i + 1 < s_j$$

と同値になることが容易にわかる．そこで，$\bigwedge_k x \equiv_{m_k} t_k$ が含まれているとして，すべての m_k の最小公倍数を M とする．すると，任意の自然数 L に対し，$L \leq x < L + M$ の範囲に，$\bigwedge_k x \equiv_{m_k} t_k$ の解 x があることは容易にわかる．したがって，上の式は次のように表せる．

$$\bigvee_{i_0, p<M} (\bigwedge_i r_i < r_{i_0} + p \wedge \bigwedge_j r_{i_0} + p < s_j \wedge \bigwedge_k r_{i_0} + p \equiv_{m_k} t_k).$$

以上によって，理論 $\mathrm{T}_{+,\equiv}$ の量化記号が消去できることが証明された．　□

系 5.4.15　プレスバーガー算術 T_+ は完全である．よって決定可能である．

証明　上の定理から，$\mathrm{T}_{+,\equiv}$ が完全であることは容易にわかる．$\mathrm{T}_{+,\equiv}$ は T_+ の保存的拡大だから，T_+ の完全性もそれから直ちに得られる．T_+ が決定可能であることはこの理論が r.e. であることと補題 5.4.2 による．　□

理論 $\mathrm{T}_<^-$ について述べたのと同様の理由により，T_+ の定理の集合も原始再帰的になる．プレスバーガー算術 T_+ に掛け算の公理を加えたのがペアノ算術であるが，ペアノ算術は不完全だから，T_+ において掛け算は定義できないことがわかる．逆に，掛け算だけの算術 Th((N, ・)) (簡単な公理では表現できない) も再帰的集合になることが知られていて，掛け算で足し算が定義できないこともわかる (文献 [Smo] を参照)．

6

自然数論　超準モデル編

算術の超準モデルの研究は大きなテーマであるが，本書では，(可算)超準モデルがもつ際立った性質である自己埋め込み性(自己同型の始切片の存在)に関する H. Friedman の結果を中心とし，その証明の手段となる往復論法や再帰的飽和モデルなどに関して様々な応用を見ていく．最後の節では，自らの充足関係を内在するようなモデルについて調べる．

6.1 超準モデルと過剰原理

本節では，算術の超準モデルの一般的な特徴，特にその順序構造の性質について述べる．$\mathrm{I}\Sigma_0$ の超準モデルは，可算であっても再帰的に定義できないこと(Tennenbaum の定理，文献 [田 1])が知られており，その構造を完璧に記述することは不可能である．しかし，順序構造だけを取り出して眺めてみると，比較的単純でわかりやすい形になっている．

$\mathcal{L}_{\mathrm{OR}}$-構造 $\mathfrak{A}$ を $\mathrm{I}\Sigma_0$ のモデルとする．$\mathfrak{A}$ は PA^- のモデルにもなっているので，$<$ は A 上の離散的な線形順序である．A は，各数項 $\bar{n}$ に対する元を含んでいるから，それを標準自然数 n と同一視すれば，$\mathfrak{A}$ は標準構造 $\mathfrak{N}$ を部分構造として含んでいると考えられる．しかも，$\neg\exists x(\bar{n} < x < \overline{n+1})$ が成り立っているので，標準自然数 n 以外の元 $a \in A$ は $\mathbb{N}$ のどの元よりも大きい．このような元 a を**超準元**(non-standard number)とか**無限大元**(infinite number)という．

いま，$\mathfrak{A}$ の 2 つの元 a, b に対し，$|a-b| \in \mathbb{N}$ のとき $a \sim b$ とおいて，同値関係 $\sim$ を定める．超準元 a の同値類 $[a]_\sim$ は，$a \pm n$ $(n \in \mathbb{N})$ で表される元の集合になるから，その中の順序構造は整数の順序と同型である．以上から，$\mathfrak{A}$ 全体の順序構造は，次のような形になる．

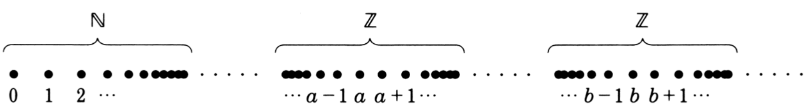


図 1

つまり，$\mathfrak{A}$ の順序型は，η をある線形順序として，

$$\mathbb{N} + \mathbb{Z} \cdot \eta$$

で表される．η は $(\mathfrak{A} - \mathfrak{N})/\sim$ の順序型である．η が最大元をもたないことは，$[a]_\sim < [a+a]_\sim$ より明らかで，ここまでは PA^- のモデルにもいえる．

さて，$\mathfrak{A}$ が $\mathrm{I}\Sigma_0$ のモデルのときは，$[a]_\sim < [b]_\sim$ に対して，$[a]_\sim < [c]_\sim < [b]_\sim$ となる c の存在がいえる．$(a+b=2c) \vee (a+b=2c+1)$ となる $c \approx (a+b)/2$ がとれるからである．（PA^- ではこの性質は証明できない．）またこれにより任意の超準元 b に対して，$[c]_\sim < [b]_\sim$ となる超準元 c の存在もいえる．よって η は最大最小をもたない稠密な線形順序である．Cantor の定理（6.3 節の付録を参照）によれば最大最小をもたない稠密な線形順序で可算なものはどれも有理数全体の順序と同型になるので，$\mathfrak{A}$ が可算のとき，その順序型は

$$\mathbb{N} + \mathbb{Z} \cdot \mathbb{Q}$$

に一意に決まる．

以上の議論を定理にまとめておく．

定理 6.1.1 PA^- の超準モデルの順序型は $\mathbb{N} + \mathbb{Z} \cdot \eta$ であり，η は最大元をもたない線形順序である．$\mathrm{I}\Sigma_0$ の超準モデルの順序型は $\mathbb{N} + \mathbb{Z} \cdot \eta$ であり，η は最大最小をもたない稠密な線形順序である．とくに，$\mathrm{I}\Sigma_0$ の可算超準モデルの順序型は，$\mathbb{N} + \mathbb{Z} \cdot \mathbb{Q}$ である．

例 1 $\mathbb{Z}[X]$ を，X を変数とする整数係数の多項式全体とすると，その上には自然に $+, \cdot, 0, 1$ が定義されて環になる．$p \in \mathbb{Z}[X]$ に対し，その最高次の係数が正になるとき $p > 0$ と定め，さらに $p > q \Leftrightarrow p - q > 0$ によって 2 つの多項式 p, q の間に順序を定める．そして，

$$\mathbb{Z}[X]^+ = \{p \in \mathbb{Z}[X] : p \geq 0\}$$

とおくと，$\mathbb{Z}[X]^+$ は，PA^- の超準モデルとなる（確かめよ）．$\mathbb{Z}[X]^+$ において，X より小さな超準元は $X - n$ と書けるものしかないこと，つまり X を含む同値類は標準部分 $\mathbb{N}$ の直後にあることなどがすぐにわかる．

補題 6.1.2 $n \geq 0$ として，$\mathrm{I}\Sigma_n$ の任意の超準モデル $\mathfrak{A}$ において，$\mathbb{N}$ は Σ_n 論理式では定義できない．つまり，$i \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \mathfrak{A}_A \models \varphi(i)$ となる Σ_n 論理式 $\varphi(x)$ は存在しない．

証明　$I\Sigma_n$ の超準モデル $\mathfrak{A}$ において，$\mathbf{N}$ を定義する Σ_n 論理式 $\varphi(x)$ が存在したとする．すると，

$$\mathfrak{A} \models \varphi(0) \land \forall x\,(\varphi(x) \to \varphi(x+1))$$

が成り立つから，$\mathfrak{A} \models \forall x\,\varphi(x)$ となり，$\varphi(x)$ は $\mathbf{N}$ の定義にならない．□

この証明から，$I\Sigma_n$ の任意のモデル $\mathfrak{A}$ において，0を含み，$x+1$ で閉じた真部分集合は Σ_n 論理式で定義できないことがわかる．

次の定理も上の補題から直ちに導ける．

定理 6.1.3（**過剰原理**(overspill principle)）　$n \geq 0$ とし，$\mathfrak{A}$ を $I\Sigma_n$ の任意の超準モデル，$\varphi(x)$ を任意の Σ_n 論理式とする．無限個の $i \in \mathbf{N}$ に対し $\mathfrak{A}_A \models \varphi(i)$ が成立するなら，ある超準元 a が存在して $\mathfrak{A}_A \models \varphi(a)$ が成立する．

証明　もし，$\mathfrak{A}_A \models \varphi(a)$ となる超準元 a が存在しないと，Σ_n 論理式 $\psi(x) = \exists y\,(x < y \land \varphi(y))$ により $\mathbf{N}$ が定義され，上の補題 6.1.2 に反する．□

次の一般化も容易である．$I\Sigma_n$ のモデル $\mathfrak{A}$ の $x+1$ で閉じた真部分集合において，Σ_n 論理式 $\varphi(x)$ を満たす元の集合が上界をもたないなら，その部分集合の外にも $\varphi(x)$ を満たす元がある．

例 2　$\mathbf{N} + \mathbb{Z}\cdot\mathbb{R}$ の順序型をもつ $I\Sigma_0$ の超準モデルは存在しない．もし，そのようなモデル $\mathfrak{A}$ があれば，a を超準元として，$\mathbb{R}$ の部分集合 $\{[na] : n \in \mathbf{N}\}$ は上界 $[aa]$ をもつので，$\mathbb{R}$ の性質から上限 $[b]$ をもつ．しかし，任意の $n \in \mathbf{N}$ について $na < b$ ならば，過剰原理により，ある超準元 c で $ca < b$ となる．すると，$[(c-1)a] < [b]$ であって，$[(c-1)a]$ も $\{[na] : n \in \mathbf{N}\}$ の上界だから，$[b]$ の最小性に反する．

問題 1　PA^- の超準モデルにも，$\mathbf{N} + \mathbb{Z}\cdot\mathbb{R}$ の順序型をもつものは存在しないことを示せ．

6.2 排除タイプ定理と終拡大

本節では，与えられた超準モデルを後ろに拡大して別のモデルを作る方法を述べる．ある条件を満たす元をモデルに付け足す一般的な方法は，そのような元の存在と与えられたモデルの(初等)ダイヤグラムが無矛盾であることを示し，完全性定理を使って拡大モデルを構成するものである．しかしこの方法では，ほしくない元もたくさん入ってしまう可能性がある．算術のモデルを後ろに延長するときに，前の方にも元が入ってしまうことは避けたい．そこで，特定の条件(タイプ)の元を排除するようにモデルを拡大する方法が必要になる．それを与えるのが，排除タイプ定理である．

定義 6.2.1 $\mathcal{L}$ を任意の言語とする．n 個の変数 $\vec{x}=(x_1,\cdots,x_n)$ 以外に自由変数をもたない $\mathcal{L}$-論理式の集合 $\Phi(\vec{x})$ を n-**タイプ**(n-type)もしくは単に**タイプ**(type)という．$\mathcal{L}$-構造 $\mathfrak{A}$ の n 個の要素 $\vec{a}=(a_1,\cdots,a_n)$ が $\Phi(\vec{x})$ のすべての論理式 $\varphi(\vec{x})$ を満たすとき，すなわち $\mathfrak{A}_A\models\varphi(\vec{a})$ となるとき，$\mathfrak{A}$ は $\vec{a}$ によって $\Phi(\vec{x})$ を**実現する**(realize)という．$\mathfrak{A}$ がどんな $\vec{a}$ によっても $\Phi(\vec{x})$ を実現しないとき，$\mathfrak{A}$ は $\Phi(\vec{x})$ を**排除する**(omit)という．

T を言語 $\mathcal{L}$ の理論とする．タイプ $\Phi(\vec{x})$ が**理論 T のタイプ**であるとは，$T\cup\Phi(\vec{c})$ ($\vec{c}$ は新しい定数) が無矛盾，すなわち $\Phi(\vec{x})$ を実現するような T のモデルが存在するときをいう．$\mathfrak{A}$ を $\mathcal{L}$-構造とし，$C\subseteq A$ とするとき**構造 $\mathfrak{A}$ における C 上のタイプ**とは，言語 $\mathcal{L}_C$ における理論 $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_C)$ のタイプのことである．

補題 6.2.2 次の条件は同値である．

(1) $\Phi(\vec{x})$ は，構造 $\mathfrak{A}$ における C 上のタイプである．

(2) $\Phi(\vec{x})$ は言語 $\mathcal{L}_C$ におけるタイプであって，次の**有限充足性**がいえる．任意有限個の $\varphi_1(\vec{x}),\cdots,\varphi_k(\vec{x})\in\Phi(\vec{x})$ に対し，

$$\mathfrak{A}_C\models\exists\vec{x}\,(\varphi_1(\vec{x})\wedge\cdots\wedge\varphi_k(\vec{x})).$$

証明　(1) を仮定する．このとき，$\Phi(\vec{x})$ は言語 $\mathcal{L}_C$ における理論 $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_C)$ のタイプであり，よって $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_C)$ のモデル $\mathfrak{B}$ で，$\Phi(\vec{x})$ を実現するものが存在する．当然 $\mathfrak{B}$ の上では $\Phi(\vec{x})$ の有限充足性が成り立っており，$\mathfrak{A}_C$ と $\mathfrak{B}$ は言語 $\mathcal{L}_C$ において初等同値だから，$\mathfrak{A}_C$ で $\Phi(\vec{x})$ の有限充足性がいえる．したがって，(2) が成り立つ．

次に (2) を仮定する．このときコンパクト性定理により $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_C) \cup \Phi(\vec{b})$ は無矛盾であり，モデル $\mathfrak{B}$ をもつ．$\mathfrak{B}$ は $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_C)$ のモデルで，$\Phi(\vec{x})$ を実現する．よって，$\Phi(\vec{x})$ は言語 $\mathcal{L}_C$ における理論 $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_C)$ のタイプである．すなわち，(1) が成り立つ．　□

例 3　$\Phi_1(x) = \{\exists y(x = y + y),\ \bar{2} < x,\ x < \bar{5}\}$ や $\Phi_2(x) = \{\bar{n} < x : n \in \mathbb{N}\}$ は算術の標準構造 $\mathfrak{N}$ における ($C = \emptyset$ 上の) タイプである．$\mathfrak{N}$ は 4 によって $\Phi_1(x)$ を実現するが，Φ_2 を排除する．

定義 6.2.3　$\mathcal{L}$-理論 T のタイプ $\Phi(\vec{x})$ が**単生成**(principal)タイプであるとは，$\mathcal{L}$ の論理式 $\psi(\vec{x})$ が存在して，$T \cup \{\exists \vec{x}\, \psi(\vec{x})\}$ が無矛盾であり，かつ任意の $\varphi(\vec{x}) \in \Phi(\vec{x})$ に対して，

$$T \vdash \forall \vec{x}\, (\psi(\vec{x}) \to \varphi(\vec{x}))$$

が成り立つことをいう．このとき，$\psi(\vec{x})$ は $\Phi(\vec{x})$ を**生成する**(generate)ともいう．単生成タイプでないタイプは**非単生成**(non-principal)タイプという．また，$\mathcal{L}$-構造 $\mathfrak{A}$ における C 上のタイプ $\Phi(\vec{x})$ が**単生成**(principal)タイプであるとは，それが(言語 $\mathcal{L}_A$ における)理論 $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A)$ のタイプとして単生成タイプになることをいう(理論 $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_C)$ でないことに注意)．

任意の $\mathcal{L}$-構造 $\mathfrak{A}$ は，その単生成タイプ $\Phi(\vec{x})$ をすべて実現する．実際，$\psi(\vec{x})$ が $\Phi(\vec{x})$ を生成するなら定義から $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A) \cup \{\exists \vec{x}\, \psi(\vec{x})\}$ は無矛盾だから，$\exists \vec{x}\, \psi(\vec{x})$ は完全理論 $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A)$ に含まれ，$\mathfrak{A}_A \models \exists \vec{x}\, \psi(\vec{x})$ となる．よって，$\psi(\vec{x})$ および $\Phi(\vec{x})$ は $\mathfrak{A}$ で実現される．

例 4 $\Phi(x) = \{\bar{n} < x : n \in \mathbb{N}\}$ は，標準構造 $\mathfrak{N}$ で排除されるので，そこで非単生成タイプであることがわかる．したがって，それは PA の非単生成タイプでもある．他方，超準モデルにおいては，a を任意の無限大元として $\psi(x) \equiv x > a$ が $\Phi(x)$ を生成するので，$\Phi(x)$ は単生成タイプになる．

我々の関心事は，ある理論 T の非単生成タイプに対し，それを排除する T のモデルがあるか否かである．それに答えるのが，次の定理である．

定理 6.2.4 (排除タイプ定理(omitting type theorem)**)** $\mathcal{L}$ を可算言語とし，T を言語 $\mathcal{L}$ における無矛盾な理論とする．T の非単生成タイプ $\Phi_i(x_1, \cdots, x_{n_i})$ が可算個 ($i \in \mathbb{N}$) 与えられたとき，T の可算モデルですべての Φ_i を排除するものが存在する．

証明 T を可算言語 $\mathcal{L}$ における無矛盾な理論とし，$\Phi_i(x_1, \cdots, x_{n_i})$ ($i \in \mathbb{N}$) をその非単生成タイプとする．我々は，Gödel の完全性定理に対する Henkin の証明に多少の細工を加えることで，すべての Φ_i を排除するような T の可算モデルを構成する．すなわち，T の完全ヘンキン拡大 T_ω で，以下の性質をもつものを作る： C をヘンキン定数($\mathcal{L}$ にない新しい定数)の可算集合として，

$$\forall i \, \forall \vec{c}_i \in C \, \exists \varphi(\vec{x}) \in \Phi_i(\vec{x}_i) \quad \neg\varphi(\vec{c}_i) \in T_\omega. \qquad (※)$$

完全性定理の証明に倣って，C から可算構造 $\mathfrak{A}$ を定義すれば，

$$\forall i \, \neg \exists \vec{a}_i \in A \, \forall \varphi(\vec{x}_i) \in \Phi_i(\vec{x}_i) \quad \mathfrak{A}_A \models \varphi(\vec{a}_i)$$

となるから，$\mathfrak{A}$ はすべての Φ_i を排除する．

T_ω は，無矛盾な理論の可算列 $T = T_0 \subseteq T_1 \subseteq \cdots$ の極限として与えられるので，各理論 T_m を定義するための準備を行う．まず言語 $\mathcal{L}_C = \mathcal{L} \cup C$ の文をすべて並べ上げて $\{\sigma_m\}$ とする．次に，$\{(i, \vec{c}_i) : i \in \mathbb{N}, \vec{c}_i = (c_1, \cdots, c_{n_i}) \in C\}$ も可算集合だから，これを並べて $\{\gamma_m\}$ とする．この 2 つの無限列 $\{\sigma_m\}$ と $\{\gamma_m\}$ を使って，T_m を帰納的に定義していく．

いま，T_m が定義されているとし，次の条件にしたがって，高々 3 個の文

をそれに加えたものを T_{m+1} とする：

（1） $T_m \cup \{\sigma_m\}$ が無矛盾であれば，$T'_{m+1} = T_m \cup \{\sigma_m\}$ とし，そうでなければ $T'_{m+1} = T_m$ とする．

（2） $T_m \cup \{\sigma_m\}$ が無矛盾で，さらに $\sigma_m = \exists x\, \theta(x)$ の形なら，T'_{m+1} に含まれないヘンキン定数 $d \in C$ を適当に選んで $T''_{m+1} = T'_{m+1} \cup \{\theta(d)\}$ とし，そうでなければ $T''_{m+1} = T'_{m+1}$ とする．

（3） $\gamma_m = (i, \vec{c}_i)$ のとき，$T''_{m+1} \cup \{\neg \varphi(\vec{c}_i)\}$ が無矛盾になる $\varphi(\vec{x}_i) \in \Phi_i(\vec{x}_i)$ を選んで，$T_{m+1} = T''_{m+1} \cup \{\neg \varphi(\vec{c}_i)\}$ とする．

上の定義において，(1) と (2) は完全性定理の証明にも使われる構成法なので，ここに説明を繰り返す必要はないだろう．これらによって T_ω は T の完全ヘンキン拡大になる．(3) がいえれば T_ω が望むべき性質 (※) を満たすことは明らかなので，あとは (3) の条件に合う $\varphi(\vec{x}_i) \in \Phi_i(\vec{x}_i)$ が常にとれることを確認すればよい．

(3) を背理法で示すため，すべての $\varphi(\vec{x}_i) \in \Phi_i(\vec{x}_i)$ に対し，$T''_{m+1} \cup \{\neg \varphi(\vec{c}_i)\}$ が矛盾すると仮定する．いま，$T''_{m+1} - T$ は有限集合だから，それら全部の連言 $\wedge$ をとって $\delta(\vec{c}_i, \vec{d})$ と表す．ここで，$\vec{d}$ は，δ に含まれる $\vec{c}_i$ 以外のヘンキン定数の列である．すると，すべての $\varphi(\vec{x}_i) \in \Phi_i(\vec{x}_i)$ に対し，

$$T \vdash \delta(\vec{c}_i, \vec{d}) \to \varphi(\vec{c}_i)$$

である．$\vec{d}$ は T や $\varphi(\vec{c}_i)$ に現れないから，自由変数のように扱うことができ，

$$T \vdash \exists \vec{y}\, \delta(\vec{c}_i, \vec{y}) \to \varphi(\vec{c}_i)$$

を得る．さらに，$\vec{c}_i$ は T に現れないので，

$$T \vdash \forall \vec{x}_i\, (\exists \vec{y}\, \delta(\vec{x}_i, \vec{y}) \to \varphi(\vec{x}_i))$$

となる．$\exists \vec{x}_i \exists \vec{y}\, \delta(\vec{x}_i, \vec{y})$ は T''_{m+1} で証明可能な文で，したがって T に加えても無矛盾である．よって，$\exists \vec{y}\, \delta(\vec{x}_i, \vec{y})$ は $\Phi(\vec{x}_i)$ を生成することになり，$\varphi(\vec{x}_i)$ が非単生成タイプであるという前提に反する．以上によっ

て，$T''_{m+1} \cup \{\neg \varphi(\vec{c}_i)\}$ が無矛盾となるような $\varphi(\vec{x}_i) \in \Phi_i(\vec{x}_i)$ が存在することがいえた． □

上の定理には数多くの応用があるが，これから述べる初等的終拡大の存在証明は，その代表的なもので，その証明を見ることで上の定理の意味がより明確になると思う．初等的終拡大の存在定理には，算術と集合論の 2 つのバージョンが知られている．ここでは算術の場合だけを扱うが，集合論の多少の知識があればそちらのバージョンも同時に導けるような一般的な枠組みで議論を進めたいと思う．

定義 6.2.5　$\mathcal{L}$ を 2 項関係記号 $<$ を含む任意の言語とし，$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ を 2 つの $\mathcal{L}$-構造として，$\mathfrak{B}$ が $\mathfrak{A}$ の部分構造になっているとする．このとき，$\mathfrak{A}$ が $\mathfrak{B}$ の**終拡大**(end-extension) である，もしくは $\mathfrak{B}$ が $\mathfrak{A}$ の**始切片**(initial segment) であるというのは，以下が成り立つことで，$\mathfrak{A} \subseteq_e \mathfrak{B}$ で表す．

$$(b \in |\mathfrak{B}| \wedge \mathfrak{A} \models a < b) \Rightarrow a \in |\mathfrak{B}|.$$

$\mathfrak{B}$ が $\mathfrak{A}$ の初等的部分構造であって，かつ $\mathfrak{A}$ が $\mathfrak{B}$ の終拡大になるなら，$\mathfrak{A}$ は $\mathfrak{B}$ の**初等的終拡大**(elementary end-extension) といい，それが $\mathfrak{B}$ を真に含むなら，**真の初等的終拡大**(proper elementary end-extension) という．

算術においては，記号 $<$ を普通の大小関係と解釈して，上の定義の意味するところは明らかであろう．集合論では $<$ を $\in$ や $\subsetneq$ と解釈することになるが，特に $\in$ は推移律を満たさないことに注意．

定義 6.2.6　2 項関係 $<$ を含む言語 $\mathcal{L}$ において，次の図式を**採集原理**(collection principle) という．

$$\forall x < u\, \exists y_1 \cdots \exists y_k\, \varphi(x, y_1, \cdots, y_k)$$
$$\to\ \exists v\, \forall x < u\, \exists y_1 < v \cdots \exists y_k < v\, \varphi(x, y_1, \cdots, y_k).$$

ここで，$\varphi(x, y_1, \cdots, y_k)$ は $\mathcal{L}$ の任意の論理式で，v 以外なら表示されていない変数も含むことができる．

PA で採集原理が成り立つことは，前章の補題5.2.2のあとに書いた．集合論において，$<$ を $\in$ と解したときが，Fraenkel の公理(「採集原理」とも「置換公理」とも呼ばれる)である．実は，算術の採集原理はこの Fraenkel の公理を模倣したものである．また，集合論で $<$ を $\subsetneq$ と解しても，採集原理が(ZF 集合論で)証明できる．

定義 6.2.7　2項関係記号 $<$ を含む可算言語 $\mathcal{L}$ において，採集原理と $<$ の推移律を満たす可算無限構造は，真の初等的終拡大をもつ．

証明　$<$ を含む可算言語 $\mathcal{L}$ における可算無限構造 $\mathfrak{A}$ が，採集原理と推移律を満たしているとする．最初に，$\mathfrak{A} \models \forall x \forall y\ (x \not< y)$ となる特殊な場合を考える．このとき，$\mathfrak{A}$ の任意の初等的拡大 $\mathfrak{B}$ はやはり $\forall x \forall y\ (x \not< y)$ を満たすので，自明な意味で終拡大になっている．真の初等的拡大の存在は，コンパクト性や超ベキを使えば簡単にいえる．

以下では，$\mathfrak{A}_A \models d < e$ となる2元 d, e が存在すると仮定する．すると，有限個の $a_1, \cdots, a_k \in A$ に対し，$a_1 < a_0, \cdots, a_k < a_0$ となる $a_0 \in A$ があることも，採集原理から導ける．なぜなら，採集原理の図式で $\varphi(x, y_1, \cdots, y_k)$ を $y_1 = a_1 \wedge \cdots \wedge y_k = a_k$ とおき，さらに $u = e$ とおいて，$x = d$ の場合を考えればよい．

さて，c を $\mathcal{L}_A$ に入らない定数とし，$\mathcal{L}_A \cup \{c\}$ における理論 T を以下のように定める．

$$T = \mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A) \cup \{a < c : a \in A\}.$$

この理論がモデルをもつことを見ておこう．上で示したように，任意の $a_1, \cdots, a_k \in A$ に対し，$a_1 < a_0, \cdots, a_k < a_0$ となる $a_0 \in A$ があるから，T の任意の有限部分集合は $\mathfrak{A}_A$ に c の適当な解釈を加えたものをモデルとする．したがって，コンパクト性定理により，T 自身もモデルをもち，それは c の解釈となる無限大元(どの $a \in A$ より大きな元)を含んでいて，さらに $\mathfrak{A}$ の初等的拡大になっている．しかし，終拡大になる保証はない．(我々は $\mathfrak{A}$

に無限大元だけを加えて，$\mathfrak{A}$ がそのまま始切片になるようなモデルを構成したいのであるが，これを可能にするのが排除タイプ定理である．）

各 $a \in A$ に対し，$\mathcal{L}_A$ のタイプ Φ_a を定義する．

$$\Phi_a(x) = \{x < a\} \cup \{x \neq b : b < a\}.$$

これらのタイプが，T の非単生成タイプであることをいう．ある $a \in A$ について，$\Phi_a(x)$ を生成する $\mathcal{L}_A \cup \{c\}$ の論理式 $\psi(x, c)$ が存在するとして矛盾を導く．（このとき，$T \cup \{\exists x\, \psi(x, c)\}$ を無矛盾とすることに注意．）

いま，$b < a$ を任意にとる．

$$T \vdash \psi(x, c) \to x \neq b$$

だから，特に $x = b$ とすれば，

$$T \vdash \neg\psi(b, c)$$

となる．したがって，有限個の $a_1, \cdots, a_k \in A$ が存在して，

$$\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A) \vdash (a_1 < c \wedge \cdots \wedge a_k < c) \to \neg\psi(b, c).$$

c は $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A)$ に現れないので，変数と同様に扱え，

$$\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A) \vdash \forall y\, ((y > a_1 \wedge \cdots \wedge y > a_k) \to \neg\psi(b, y))$$

を得る．前頁の議論により $a_0 > a_1, \cdots, a_0 > a_k$ となる $a_0 \in A$ をとれば，推移律から，

$$\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A) \vdash \forall y > a_0\, \neg\psi(b, y)$$

となる．よって

$$\mathfrak{A}_A \models \exists z\, \forall y > z\, \neg\psi(b, y)$$

であり，$b < a$ は任意にとったので，

$$\mathfrak{A}_A \models \forall x < a\, \exists z\, \forall y > z\, \neg\psi(x, y)$$

を得る．（a_0 は b に依存しているため，$\forall x < a\, \forall y > a_0\, \neg\psi(x, y)$ などとは書けないことに注意．）

さて，ここで採集原理を用いて，

$$\mathfrak{A}_A \models \forall x < a\, \exists z < a'\, \forall y > z\, \neg\psi(x, y)$$

となる $a' \in A$ があり，推移律を用いて，

$$\mathfrak{A}_A \models \forall x < a\, \forall y > a'\, \neg\psi(x, y)$$

を導く．そして，$T = \mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A) \cup \{a < c : a \in A\}$ だから，

$$T \vdash \forall x < a\, \neg\psi(x, c)$$

すなわち

$$T \vdash \forall x\, (\psi(x, c) \to x \not< a)$$

を得る．他方，$\psi(x, c)$ は $\Phi_a(x)$ を生成し，$T \vdash \forall x\, (\psi(x, c) \to x < a)$ であるから

$$T \vdash \forall x\, \neg\psi(x, c)$$

となり，これは $T \cup \{\exists x\, \psi(x, c)\}$ が無矛盾であるという仮定に反する．

□

定義 6.2.8　ペアノ算術 PA の可算モデルは，真の初等的終拡大をもつ．

この系の主張は，非可算モデルに拡張することも可能であり，その拡張を含めて MacDowell-Specker の定理と呼ばれている．拡張については，文献 [Kay] などを参照されたい．また，ZF 集合論に対する初等的終拡大の証明は [ChK] にある．付言すると，集合論の結果については，非可算の場合に拡張できないことも知られている．

問題 2　$I\Sigma_0$ のモデル $\mathfrak{A}$ が真の初等的終拡大をもつとき，$\mathfrak{A}$ は PA のモデルになることを示せ．

6.3　再帰的飽和モデルと自己埋め込み定理

本節のテーマは，なるべく多くのタイプ $\Phi(\vec{x})$ を実現するような可算構造を見つけることである．例えば，言語が可算で，論理式の総数が可算でも，タイプ $\Phi(\vec{x})$ は非可算個存在し得るので，それらのすべてを可算構造で実現するのは無理であろう．そこで登場するのが，再帰的なタイプを実現する再

帰的飽和モデルである．これを使って，$\mathrm{I}\Sigma_1$ の可算超準モデルに関するFriedman の自己埋め込み定理を証明する．

可算言語におけるタイプ $\Phi(\vec{x})$ が再帰的であるとは，それに含まれる論理式のゲーデル数の集合が再帰的であることをいう．Craig の補題(補題 5.3.7)と同様な議論により，タイプは r.e.でも再帰的でも，あるいは原始再帰的でも実質上変わらない．

定義 6.3.1 $\mathcal{L}$ を可算言語とする．$\mathcal{L}$-構造 $\mathfrak{A}$ が**再帰的飽和**(recursively saturated)であるとは，($\mathfrak{A}$ における)任意有限集合 $\{a_1, \cdots, a_n\} \subseteq A$ 上の再帰的 1-タイプが必ず $\mathfrak{A}$ で実現されること，すなわち任意の再帰的タイプ $\Phi(x_0, x_1, \cdots, x_n) = \{\varphi_i(x_0, x_1, \cdots, x_n)\}$ と任意の $a_1, \cdots, a_n \in A$ について，

$$\forall j\ \exists a \in A\ \forall i < j\ \mathfrak{A}_A \models \varphi_i(a, a_1, \cdots, a_n) \Rightarrow \exists a \in A\ \forall i\ \mathfrak{A}_A \models \varphi_i(a, a_1, \cdots, a_n)$$

となることをいう．

問題 3 任意の有限構造は，再帰的飽和になることを示せ．

算術の標準構造 $\mathfrak{N}$ は，明らかに再帰的飽和でない．しかし，これから示す補題により，$\mathfrak{N}$ と初等的同値な可算超準モデルで再帰的飽和なものが存在する．

補題 6.3.2 可算言語の可算構造は，再帰的飽和な可算初等的拡大をもつ．

証明 $\mathfrak{A}$ を可算言語の可算構造とする．各再帰的タイプ $\Phi = \{\varphi_i(x_0, x_1, \cdots, x_n)\}$ と各 $a_1, \cdots, a_n \in A$ に対し，新しい定数 $c_{\Phi, a_1, \cdots, a_n}$ を用意する．その上で，

$$T_1 = \mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A) \cup \{\exists x\ \forall i < j\ \varphi_i(x, a_1, \cdots, a_n) \to \forall i < j\ \varphi_i(c_{\Phi, a_1, \cdots, a_n}, a_1, \cdots, a_n) : j \in \mathbb{N} \text{ かつ } c_{\Phi, a_1, \cdots, a_n} \text{ は新しい定数}\}$$

とおく．コンパクト性定理と Löwenheim-Skolem の定理から，T_1 は可算モデル $\mathfrak{A}_1$ をもつ．このとき，$\mathfrak{A} \prec \mathfrak{A}_1$ であり，また $\mathfrak{A}_1$ は（$\mathfrak{A}_1$ における）A の任意有限部分集合上の再帰的 1-タイプをすべて実現する．同様に，A_1 の有限部分集合上の再帰的 1-タイプをすべて実現する可算モデル $\mathfrak{A}_2 \succ \mathfrak{A}_1$ を構成することができる．さらに $\mathfrak{A}_2 \prec \mathfrak{A}_3 \prec \mathfrak{A}_4 \prec \cdots$ を作って，最後に $\mathfrak{A}_\infty$ をこの初等鎖の和 $\bigcup_k \mathfrak{A}_k$ とする．定理 4.1.10 から $\mathfrak{A}_\infty$ は $\mathfrak{A}$ の初等的拡大であり，また可算であることも明らか．再帰的飽和性を見るため，$\mathfrak{A}_\infty$ から任意に有限個の元を選んでその上の再帰的タイプを考える．それは十分大きな k に対する A_k 上のタイプになっており，$\mathfrak{A}_\infty$ の初等的部分構造 $\mathfrak{A}_{k+1}$ で実現される．したがって，その初等的拡大 $\mathfrak{A}_\infty$ でも実現されることになる． □

以下，本節の最後まで，算術 $\mathrm{I}\Sigma_n$ の可算モデルについて考察する．それらのモデルは再帰的飽和とは限らないが，制限された論理式のクラスに対してはある種の飽和性を成り立たせており，その性質は充足関係の定義とも深く関わっている．まず，前章の補題 5.3.12 を次のように言い換えておく．この形で Tarski の“真理定義不可能性定理”と呼ばれることもある．

補題 6.3.3 T を $Q_<$ の無矛盾な拡大とする．このとき，次のような論理式 $\mathrm{Sat}(x, y)$ は存在しない：任意の $\mathcal{L}_{\mathrm{OR}}$-論理式 $\varphi(v_1, \cdots, v_k)$（但し，$v_1, \cdots, v_k$ 以外の自由変数を含まない）に対して，

$$T \vdash \forall s\, (\mathrm{Sat}(\ulcorner \varphi \urcorner, s) \leftrightarrow \varphi(s_1, \cdots, s_k)).$$

ここで，s は列 $(s_1, \cdots, s_k)$ のコードである．

補題 6.3.3 における論理式 $\varphi(v_1, \cdots, v_k)$ を文に制限して，$\mathrm{Sat}(x, \emptyset)$ が存在しないというのが補題 5.3.12 だったから，上の補題はそれから直ちに導ける．しかし，$\varphi(v_1, \cdots, v_k)$ の形を Σ_n 等に制限すれば一種の $\mathrm{Sat}(x, y)$ が存在するというのが次の補題である．次節では，言語を拡張することで $\mathrm{Sat}(x, y)$ を扱うことになる．

補題 6.3.4　各 $n \in \mathbb{N}$ について，言語 $\mathcal{L}_{\mathrm{OR}}$ の論理式 $\mathrm{Sat}_{\Sigma_n}(x, y)$ と $\mathrm{Sat}_{\Pi_n}(x, y)$ が存在して，任意の Σ_n 論理式 $\varphi(v_1, \cdots, v_k)$ と Π_n 論理式 $\psi(v_1, \cdots, v_k)$（どちらも $v_1, \cdots, v_k$ 以外の自由変数を含まない）に対して，

$$\mathrm{I}\Sigma_1 \vdash \forall s\, (\mathrm{Sat}_{\Sigma_n}(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner}, s) \leftrightarrow \varphi(s_1, \cdots, s_k)),$$

$$\mathrm{I}\Sigma_1 \vdash \forall s\, (\mathrm{Sat}_{\Pi_n}(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner}, s) \leftrightarrow \psi(s_1, \cdots, s_k)).$$

ここで，s は列 $(s_1, \cdots, s_k)$ のコードである．また，$n > 0$ のとき，$\mathrm{Sat}_{\Sigma_n} \in \Sigma_n$，$\mathrm{Sat}_{\Pi_n} \in \Pi_n$ にとることができる．

証明　まず，$n = 0$ のときを考える．大雑把にいうと，Σ_0 の文の真偽は原始再帰的に定義されるので，補題 5.2.6 により，Sat_{Σ_0} は $\mathrm{I}\Sigma_1$ において Σ_1 でも Π_1 でも表せることになる．その構成をもう少し具体的に見ていこう．

とりあえず，簡単な Σ_0 論理式 $u = t(v_1, \cdots, v_k)$ に対して，Sat_{Σ_0} を定義することを考えよう．ここで，t は $v_1, \cdots, v_k$ 以外の自由変数を含まない項であり，u は変数とする．厳密にやろうとすれば，まず“x がこの形の論理式のゲーデル数である”ことを表す述語 $\gamma(x)$ を定義し，$\gamma(x)$ を満たす x について $\mathrm{Sat}_{\Sigma_0}(x, y)$ を定義することになるが，それはあまりに冗長になるので，$\mathrm{Sat}_{\Sigma_0}(\ulcorner u = t(v_1, \cdots, v_k) \urcorner, y)$ という表現にその意味をもたせる．ここで注意すべき点は「$u = t(v_1, \cdots, v_k)\urcorner$ の部分が厳密には体系内の変数であること（つまり，超準モデルの上で解釈すれば無限長の論理式に対する超準ゲーデル数の値もとりうること）である．いま，t の部分項すべてを適当に並べて $t_0, t_1, \cdots, t_{l_t}$ とする．もちろん，「$t\urcorner$ と列 $(\ulcorner t_0 \urcorner, \cdots, \ulcorner t_{l_t} \urcorner)$ のコードの対応は，原始再帰的であるとしてよい．このような理解の上で，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Sat}_{\Sigma_0}(\ulcorner u = t(v_1, \cdots, v_k) \urcorner, (r, s_1, \cdots, s_k)) \\
&\leftrightarrow \exists z\, (z = (z_0, z_1, \cdots, z_{l_t}) \wedge \forall i, i', i'' \leq l_t \\
&\qquad ((\ulcorner t_i \urcorner = \ulcorner 0 \urcorner \to z_i = 0) \wedge (\ulcorner t_i \urcorner = \ulcorner 1 \urcorner \to z_i = 1) \\
&\qquad \wedge (\ulcorner t_i \urcorner = \ulcorner v_j \urcorner \to z_i = s_j) \wedge (\ulcorner t_i \urcorner = \ulcorner t_{i'} + t_{i''} \urcorner \to z_i = z_{i'} + z_{i''}) \\
&\qquad \wedge (\ulcorner t_i \urcorner = \ulcorner t_{i'} \cdot t_{i''} \urcorner \to z_i = z_{i'} \cdot z_{i''}) \wedge (\ulcorner t_i \urcorner = \ulcorner t \urcorner \to z_i = r)))
\end{aligned}$$

とおく．すると，外から与えた(標準の) Σ_0 論理式 $u=t(v_1,\cdots,v_k)$ に対しては，$\mathrm{Sat}_{\Sigma_0}(\ulcorner u=t(v_1,\cdots,v_k)\urcorner,(r,s_1,\cdots,s_k))$ が $r=t(s_1,\cdots,s_k)$ と同値になっていることは自明であろう．また，上の論理式は Σ_1 で表されているが，これを同値な Π_1 論理式($\forall z\,(z=(z_0,z_1,\cdots,z_{l_t})\to\cdots)$ の形)で表すのも容易である．

一般の Σ_0 論理式についても，それを部分論理式にバラして，各部分で満たすべき条件(Tarskiの真理条項)を満たしているように記述すればよいだけである．詳細は読者に委ねるが，必要なら文献 [HaP] または [Kay] を参照していただきたい．なお，Sat_{Π_0} は，Sat_{Σ_0} と同値な Π_1 論理式とする．

次に，Sat_{Σ_n} を用いて，$\mathrm{Sat}_{\Sigma_{n+1}}$ を定義する．Sat_{Σ_0} の定義には，体系内の帰納法が使われているのに対し，ここではメタ変数 n に関する帰納法が使われることに注意してほしい．Σ_{n+1} 論理式 $\exists u_1\cdots\exists u_j\,\varphi(u_1,\cdots,u_j,v_1,\cdots,v_k)$ (ここで，$\varphi\in\Pi_n$) に対する $\mathrm{Sat}_{\Sigma_{n+1}}$ は，以下のように定義する．

$$\mathrm{Sat}_{\Sigma_{n+1}}(\ulcorner\exists u_1\cdots\exists u_j\,\varphi(u_1,\cdots,u_j,v_1,\cdots,v_k)\urcorner,(s_1,\cdots,s_k))$$
$$\leftrightarrow\exists r\,\mathrm{Sat}_{\Pi_n}(\ulcorner\varphi(u_1,\cdots,u_j,v_1,\cdots,v_k)\urcorner,(r_1,\cdots,r_j,s_1,\cdots,s_k)).$$

こうして定義された $\mathrm{Sat}_{\Sigma_{n+1}}$ が定理の条件を満たしていることもメタ帰納法で証明される．すなわち，標準の Σ_{n+1} 論理式 $\exists u_1\cdots\exists u_j\,\varphi(u_1,\cdots,u_j,v_1,\cdots,v_k)$ に対して，$\mathrm{I}\Sigma_1$ において以下が証明できる．

$$\mathrm{Sat}_{\Sigma_{n+1}}(\overline{\ulcorner\exists u_1\cdots\exists u_j\,\varphi(u_1,\cdots,u_j,v_1,\cdots,v_k)\urcorner},(s_1,\cdots,s_k))$$
$$\leftrightarrow\exists r\,\mathrm{Sat}_{\Pi_n}(\overline{\ulcorner\varphi(u_1,\cdots,u_j,v_1,\cdots,v_k)\urcorner},(r_1,\cdots,r_j,s_1,\cdots,s_k))$$
$$\leftrightarrow\exists r\,\varphi(r_1,\cdots,r_j,s_1,\cdots,s_k)$$
$$\leftrightarrow\exists u_1\cdots\exists u_j\,\varphi(u_1,\cdots,u_j,s_1,\cdots,s_k).$$

最後に，$\mathrm{Sat}_{\Pi_{n+1}}$ の定義も同様にできる．　□

充足関係の存在とモデルの飽和性には密接な関連がある．次に述べる補題も，それを表すものの１つである．

補題 6.3.5 各 $n > 0$ について，$I\Sigma_n$ の超準モデル $\mathfrak{A}$ は，Σ_n 論理式だけからなる A の有限部分集合上の任意の再帰的 1-タイプを実現する．（このとき $\mathfrak{A}$ は，Σ_n-**再帰的飽和**(Σ_n-recursively saturated)であるという．）

証明 $\Phi(x_0, x_1, \cdots, x_k)$ を Σ_n 論理式だけからなる再帰的タイプとする．Craig の補題より，Φ は原始再帰的と仮定してよい．定理 5.2.5 より，$\Phi(x_0, x_1, \cdots, x_k)$ に属する論理式のゲーデル数全体は Σ_1 論理式 $\varphi(x)$ でも Π_1 論理式 $\varphi'(x)$ でも表せ，かつそれらの同値性は $I\Sigma_1$ で証明できるとしてよい．すると，$\Phi(x_0, a_1, \cdots, a_k)$ の有限充足可能性は，次のように表現できる．各 $j \in \mathbf{N}$ について，次の論理式が成り立つ．

$$\exists a\, \forall i < \overline{j}\ (\varphi'(i) \to \mathrm{Sat}_{\Sigma_n}(i, (a, a_1, \cdots, a_k))).$$

上の論理式が Σ_n であることは $B\Sigma_n$ ($\subseteq I\Sigma_n$) で証明できる．そこで，いま $\mathfrak{A}$ を $I\Sigma_n$ の超準モデルとすると，各 $j \in \mathbf{N}$ について上式が成り立つので，過剰原理より，ある無限大元 j' でも上式が成り立つ．この j' に対して存在する a は，任意の標準自然数 i について，$\varphi'(\overline{i}) \to \mathrm{Sat}_{\Sigma_n}(\overline{i}, (a, a_1, \cdots, a_k))$ を満たす．いま i を $\Phi(x_0, x_1, \cdots, x_k)$ に属する論理式のゲーデル数とすれば，Σ_1 論理式 $\varphi(\overline{i})$ が成り立つので，Σ_1 完全である $I\Sigma_1$ のモデル $\mathfrak{A}$ においても $\varphi(\overline{i})$ そして $\varphi'(\overline{i})$ が成り立ち，$\mathfrak{A}_A \models \mathrm{Sat}_{\Sigma_n}(\overline{i}, (a, a_1, \cdots, a_k))$ となる．すなわち，$\Phi(a, a_1, \cdots, a_k)$が成り立つ．よって，有限充足可能な Σ_n-再帰的タイプは実現されることがわかった． □

上の補題により，PA の任意の超準モデルは，各 $n > 0$ について Σ_n-再帰的飽和であることがいえるが，このことから一般の再帰的飽和性を導くことはできない．実際，再帰的飽和でない超準モデルの構成法の 1 つを次の問題で与える．また，もしも PA において充足関係 $\mathrm{Sat}(x, y)$ が定義されているなら，上の証明と同様にして PA の任意の超準モデルが再帰的飽和になってしまうので，PA で充足関係が定義できないことの別証明が得られたことになる．

問題4　$\mathfrak{A}$ を PA の超準モデルとし，$a \in A$ を任意の超準元とする．そして，$\mathfrak{A}$ において論理式 $\varphi(x, a)$ (a 以外のパラメータを含まない)で定義できる元 $b \in A$ (すなわち，$\mathfrak{A}_{\{a,b\}} \models \forall x\,(x = b \leftrightarrow \varphi(x, a))$) の全体を $\mathrm{K}(\mathfrak{A}\,;\,a)$ とおく．このとき，以下を示せ．

(1)　$\mathfrak{A}$ の関数や関係を $\mathrm{K}(\mathfrak{A}\,;\,a)$ に制限することで，$\mathrm{K}(\mathfrak{A}\,;\,a)$ は $\mathfrak{A}$ の部分構造と見ることができる．$\mathrm{K}(\mathfrak{A}\,;\,a)$ は，$\mathfrak{A}$ の初等的部分構造になる．

(2)　$\Phi(x, a) = \{\exists v\,\varphi(v, a) \to \exists v < x\,\varphi(v, a) : \varphi(v, u)$ は任意の論理式$\}$ は再帰的で有限充足可能だが，$\mathrm{K}(\mathfrak{A}\,;\,a)$ では実現できない．

問題5　$\mathfrak{A} = (A, +, \cdot, 0, 1, <)$ を $\mathrm{I}\Sigma_1$ の超準モデルとすると，$\mathfrak{A}' = (A, +, 0, 1, <)$ は再帰的飽和であることを示せ．(この定理の逆を次の節の例5で取り上げる．)

さて，上の補題 6.3.5 において，再帰的(飽和性)をもう少し一般的な条件に拡張する．そのため，次の概念を導入する．

定義 6.3.6　$\mathfrak{A}$ を $\mathrm{I}\Sigma_1$ のモデルとし，$a \in A$ を任意の元とする．このとき，集合 $\{n \in \mathbb{N} : \mathfrak{A} \models \overline{p(n)} | a\}$ を $\mathfrak{A}$ において a **で符号化される**集合(the set coded by a)という．ここで，$p(n)$ は $n+1$ 番目の素数を表す原始再帰的関数であり，$u|v \Leftrightarrow \exists w \leq v\ (u \cdot w = v)$ である．また，$\mathfrak{A}$ において何かの元で符号化される集合全体を $\mathfrak{A}$ の**標準システム**(standard system)と呼び，$\mathrm{SSy}(\mathfrak{A})$ と書く．

補題 6.3.7 (D. Scott)　$\mathfrak{A}$ を $\mathrm{I}\Sigma_1$ の超準モデルとする．いま，共通部分をもたない2つの r. e. 集合が与えられたとき，それらを分離する集合が $\mathrm{SSy}(\mathfrak{A})$ からとれる．特に，どんな再帰的集合も $\mathrm{SSy}(\mathfrak{A})$ に属する．

証明　共通部分をもたない2つの r. e. 集合を($\mathfrak{N}$ において)表す Σ_1 論理式を $\exists y\ \theta_i(x, y)$ (θ_i は Σ_0 論理式，$i = 0, 1$) とする．これらに対して，$\exists v\ \forall x, y < \bar{j}\ ((\theta_0(x, y) \to p(x) | v) \land (\theta_1(x, y) \to p(x) \nmid v))$ とおく．すると上の論理式は Σ_1 論理式で，$\mathrm{I}\Sigma_1$ の超準モデル $\mathfrak{A}$ において，任意の標準自然

数 j で成り立つから，ある超準元 $j=b$ でも成り立つ．このとき，上の論理式を満たす v によって符号化される集合が，最初に与えられた2つの r.e. 集合を分離することは以下のようにしてわかる．

$$\mathfrak{N} \models \exists y\, \theta_0(\bar{n}, y) \Rightarrow \mathfrak{A}_{\{b\}} \models \exists y < b\, \theta_0(\bar{n}, y) \Rightarrow \mathfrak{A}_{\{v\}} \models \overline{p(n)} | v,$$
$$\mathfrak{N} \models \exists y\, \theta_1(\bar{n}, y) \Rightarrow \mathfrak{A}_{\{b\}} \models \exists y < b\, \theta_1(\bar{n}, y) \Rightarrow \mathfrak{A}_{\{v\}} \models \overline{p(n)} \nmid v.$$

□

注．一般に，2つの r.e. 集合を分離する集合は再帰的にとれない(定理2.5.5)．つまり，SSy($\mathfrak{A}$) は再帰的集合のクラスより真に大きい．補題8.3.6も参照．

補題 6.3.8　$n>0$ とし，$\mathfrak{A}$ を $\mathrm{I}\Sigma_n$ の超準モデルとする．このとき，A の有限部分集合上の符号化されるタイプが Σ_n 論理式だけからなるならば，それは実現される．

証明は，補題6.3.5の証明と全く同様である．そして，この補題に対しては，次のような逆が成り立つ．

補題 6.3.9　$n>0$ とし，$\mathfrak{A}$ を $\mathrm{I}\Sigma_n$ の超準モデルとする．$\vec{a} \in A^{<\omega}$ を任意に固定する．このとき，

$$\Phi(\vec{x}) = \{\varphi(\vec{x}) : \varphi(\vec{x}) \in \Sigma_n \wedge \mathfrak{A} \models \varphi(\vec{a})\},$$
$$\Psi(\vec{x}) = \{\psi(\vec{x}) : \psi(\vec{x}) \in \Pi_n \wedge \mathfrak{A} \models \psi(\vec{a})\}$$

は，符号化される．

証明　$\mathrm{I}\Sigma_1$ において $\mathrm{Sat}_{\Sigma_n}(x, y)$ と $\mathrm{Sat}_{\Pi_n}(x, y)$ が定義できるから，補題の $\Phi(\vec{x})$ と $\Psi(\vec{x})$ に対しそれぞれ Σ_n 論理式 $\varphi_1(k, \vec{a})$ と Π_n 論理式 $\psi_1(k, \vec{a})$ が存在して，$\varphi \in \Phi \leftrightarrow \varphi_1(\ulcorner\varphi\urcorner, \vec{a})$ および $\psi \in \Psi \leftrightarrow \psi_1(\ulcorner\psi\urcorner, \vec{a})$ が成り立つ．すると，$\mathrm{I}\Sigma_n$ の超準モデル $\mathfrak{A}$ の超準元 l に対し，有界切片 $U=\{k<l : \varphi_1(k, \vec{a})\}$, $V=\{k<l : \psi_1(k, \vec{a})\}$ のコード $\Pi_{k\in U}\, p(k)$, $\Pi_{k\in V}\, p(k)$ が $\mathfrak{A}$ で存在することが，Σ_n-帰納法からいえる．そして，これらのコードがそれぞれ $\Phi(\vec{x})$ と $\Psi(\vec{x})$ を符号化していることは明らかである．□

以上の準備のもとで，Friedman の自己埋め込み定理を証明する．次の補題はこの定理の証明の核となるもので，定理のバリエーションを考える際にも重要である．

補題 6.3.10　$n>0$ として，$\mathfrak{A},\mathfrak{B}$ を $\mathrm{I}\Sigma_n$ の可算超準モデルとする．$a_0\in A$ と $b_0, c\in B$ を任意にとる．このとき，次の 2 条件は同値である．

（1）　$c\notin B'$ となる $\mathfrak{B}'\subseteq_e\mathfrak{B}$ が存在し，$\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}'$ の間に $h(a_0)=b_0$ となる同型 h があって，さらに任意の Π_{n-1} 論理式 $\varphi(\vec{x})$ と任意の $\vec{b}\in B'^{<\omega}$ について

$$\mathfrak{B}'_{\{\vec{b}\}}\models\varphi(\vec{b})\ \Leftrightarrow\ \mathfrak{B}_{\{\vec{b}\}}\models\varphi(\vec{b})$$

が成り立つ．

（2）　$\mathrm{SSy}(\mathfrak{A})=\mathrm{SSy}(\mathfrak{B})$，かつ任意の Π_{n-1} 論理式 $\varphi(\vec{v},u)$ について，

$$\mathfrak{A}_A\models\exists\vec{v}\,\varphi(\vec{v},a_0)\ \Rightarrow\ \mathfrak{B}_B\models\exists\vec{v}<c\,\varphi(\vec{v},b_0)$$

が成り立つ．

証明　(1) を仮定し (2) の前半を示す．$\mathfrak{A}\cong\mathfrak{B}'$ より $\mathrm{SSy}(\mathfrak{A})=\mathrm{SSy}(\mathfrak{B}')$ は明らか．また，$\mathfrak{B}'\subseteq_e\mathfrak{B}$ より，$\mathrm{SSy}(\mathfrak{B}')\subseteq\mathrm{SSy}(\mathfrak{B})$ も明らかである．そこで，いま $R\in\mathrm{SSy}(\mathfrak{B})$ とし，R は r によって符号化されているとしよう．B' の超準元 l を任意にとる．$\mathfrak{B}'$ も $\mathrm{I}\Sigma_n$ $(n>0)$ のモデルだから，$l+1$ 番目の素数 $p(l)$ は B' に属し，さらに $p(l)!\in B'$ もいえる．そこで，$\mathfrak{B}$ において r と $p(l)!$ の最大公約数 m をとれば，$\mathfrak{B}'$ は $\mathfrak{B}$ の始切片だから，$m\in B'$ である．このとき，m も R を符号化することは明らかである．以上から，$\mathrm{SSy}(\mathfrak{A})=\mathrm{SSy}(\mathfrak{B})$ を得る．

(2) の後半を示すため，$\varphi(\vec{v},u)$ を Π_{n-1} 論理式として，$\mathfrak{A}_A\models\exists\vec{v}\,\varphi(\vec{v},a_0)$ とする．まず，$\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}'$ の間の同型から，$\mathfrak{B}'_{B'}\models\exists\vec{v}\,\varphi(\vec{v},b_0)$ である．すなわち $\vec{d}\in B'$ が存在して，$\mathfrak{B}'_{B'}\models\varphi(\vec{d},b_0)$ となるから，(1) の仮定より $\mathfrak{B}_B\models\varphi(\vec{d},b_0)$ であって，よって $\mathfrak{B}_B\models\exists\vec{v}<c\,\varphi(\vec{v},b_0)$ となる．

次に，(2) を仮定して，(1) を示す．これは，いわゆる**往復論法**(back-

and-forth argument)(本節付録参照)の応用である．A の要素の並べ上げ $a_0, a_1, \cdots$ と B' の要素の並べ上げ $b_0, b_1, \cdots$ を交互に作ってゆき，$h(a_i) = b_i$ によって $\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}'$ の間に同型 h を定義する．いま，$a_0, a_1, \cdots, a_{2k}$ と $b_0, b_1, \cdots, b_{2k}$ が選ばれて，任意の Π_{n-1} 論理式 $\varphi(\vec{v}, \vec{u})$ について，

$$\mathfrak{A}_A \models \exists \vec{v}\, \varphi(\vec{v}, a_0, \cdots, a_{2k}) \Rightarrow \mathfrak{B}_B \models \exists \vec{v} < c\, \varphi(\vec{v}, b_0, \cdots, b_{2k}) \qquad (\#)$$

が成り立っているとする．我々は，この条件を保存させるように，a_{2k+1}, a_{2k+2} と b_{2k+1}, b_{2k+2} を選ぶ．これによって，(1) が得られることは後で述べる．

A は可算だから，自然数によって番号付けられており，$a_0, a_1, \cdots, a_{2k}$ に現れない元の中から，番号の最小なものを選んで a_{2k+1} とする．(これによって，$A = \{a_i : i \in \mathbf{N}\}$ となることが保証される.) いまから，(#)が成り立つような b_{2k+1} を探す．$\mathfrak{A}$ において，$a_0, \cdots, a_{2k}, a_{2k+1}$ で成り立つ Σ_n 論理式 $\exists \vec{v}\, \varphi(\vec{v}, x_0, \cdots, x_{2k+1})$ $(\varphi \in \Pi_{n-1})$ を集めて $\Phi(\vec{x})$ とする．補題6.3.9により，$\Phi(\vec{x})$ は $\mathfrak{A}$ において符号化され，$\mathrm{SSy}(\mathfrak{A}) = \mathrm{SSy}(\mathfrak{B})$ だから，$\mathfrak{B}$ においても符号化される．さらに，

$$\begin{aligned}&\Phi'(x_0, \cdots, x_{2k+1}, x_{2k+2})\\&= \{\exists \vec{v} < x_{2k+2}\, \varphi(\vec{v}, x_0, \cdots, x_{2k+1}) : \exists \vec{v}\, \varphi(\vec{v}, x_0, \cdots, x_{2k+1}) \in \Phi\}\end{aligned}$$

とおくとき，Φ と Φ' の間には原始再帰的な変換があるから，Φ' も $\mathfrak{B}$ において符号化される．あとは，$\Phi'(b_0, \cdots, b_{2k}, x, c)$ が $\mathfrak{B}$ において有限充足可能となることをいえば，補題6.3.5により $\Phi'(b_0, \cdots, b_{2k}, x, c)$ を実現する元 $x = b$ が存在するので，それを b_{2k+1} とおいて (#) が成り立つことは明らか．そこで，$\Phi'(b_0, \cdots, b_{2k}, x, c)$ から有限個の論理式を任意に選んで，$\exists \vec{v} < c\, \varphi_i(\vec{v}, b_0, \cdots, b_{2k}, x)$ $(i \leq j)$ としよう．Φ' の定義から，各 $i \leq j$ について $\exists \vec{v}\, \varphi_i(\vec{v}, a_0, \cdots, a_{2k}, a_{2k+1})$ が $\mathfrak{A}$ で成り立つので，

$$\mathfrak{A}_A \models \exists \vec{v}_0 \cdots \exists \vec{v}_j \exists x \bigwedge_{i \leq j} \varphi_i(\vec{v}_i, a_0, \cdots, a_{2k}, x)$$

となる．

これに対し，(#) を用いると，

$$\mathfrak{B}_B \models \exists \vec{v}_0 < c \cdots \exists \vec{v}_j < c \, \exists x < c \bigwedge_{i \le j} \varphi_i(\vec{v}_i, b_0, \cdots, b_{2k}, x)$$

であるから，簡単な論理変形により，

$$\mathfrak{B}_B \models \exists x \bigwedge_{i \le j} \exists \vec{v} < c \, \varphi_i(\vec{v}, b_0, \cdots, b_{2k}, x)$$

を得る．すなわち，$\Phi'(b_0, \cdots, b_{2k}, x, c)$ は有限充足可能であり，b_{2k+1} が求められた．

今度は，b_{2k+2} を先に選んで，対応する a_{2k+2} を探す．$\{b_0, \cdots, b_{2k}, b_{2k+1}\}$ が，$\mathfrak{B}$ の始切片を形成するときは，$b_{2k+2} = b_{2k+1}$，$a_{2k+2} = a_{2k+1}$ とおき，これで (#) が成り立っている．そうでないとき，$b < \max\{b_0, \cdots, b_{2k}, b_{2k+1}\}$ で，$b_0, \cdots, b_{2k}, b_{2k+1}$ に現れない b があるので，その中から B に予め与えられている順番で最小の元を b_{2k+2} とする．（これによって，最終的に $\{b_i : i \in \mathbf{N}\}$ が $\mathfrak{B}$ の始切片を形成するようになる．）　b_{2k+2} に対応する a_{2k+2} を求める．$\mathfrak{B}$ において，$b_0, \cdots, b_{2k+1}, b_{2k+2}, c$ について成り立つ Σ_n 論理式 $\forall \vec{v} < x_{2k+3} \, \psi(\vec{v}, x_0, \cdots, x_{2k+2})$ を集めて $\Psi(\vec{x})$ とすると，これは $\mathfrak{B}$ で符号化される．したがって，

$$\Psi'(x_0, \cdots, x_{2k+1}, x_{2k+2})$$
$$= \{\forall \vec{v} \, \psi(\vec{v}, x_0, \cdots, x_{2k+2}) : \forall \vec{v} < x_{2k+3} \, \psi(\vec{v}, x_0, \cdots, x_{2k+2}) \in \Psi\}$$

とおくとき，上と同様な議論によって，Ψ' は $\mathfrak{A}$ において符号化される．あとは，$\Psi'(a_0, \cdots, a_{2k+1}, x)$ が $\mathfrak{A}$ において有限充足可能となることをいえばよい．そこで，$\Psi'(a_0, \cdots, a_{2k+1}, x)$ から有限個の論理式を任意に選んで，$\forall \vec{v} \, \psi_i(\vec{v}, a_0, \cdots, a_{2k+1}, x)$ $(i \le j)$ としよう．これら有限個の論理式を実現する $x = a$ が $a < \max\{a_0, \cdots, a_{2k}, a_{2k+1}\}$ の範囲でとれることを背理法で示す．つまり，

$$\mathfrak{A}_A \models \forall x < \max\{a_0, \cdots, a_{2k}, a_{2k+1}\} \, \exists \vec{v} \bigvee_{i \le j} \neg \psi_i(\vec{v}, a_0, \cdots, a_{2k+1}, x)$$

と仮定して矛盾を導く．Σ_n-帰納法で証明できる Σ_n-採集原理により，

$$\mathfrak{A}_A \models \exists y \, \forall x < \max\{a_0, \cdots, a_{2k}, a_{2k+1}\} \, \exists \vec{v} < y \bigvee_{i \leq j} \neg \psi_i(\vec{v}, a_0, \cdots, a_{2k+1}, x).$$

これに対し，(#)を用いると，

$$\mathfrak{B}_B \models \exists y < c \, \forall x < \max\{b_0, \cdots, b_{2k}, b_{2k+1}\} \, \exists \vec{v} < y \bigvee_{i \leq j} \neg \psi_i(\vec{v}, b_0, \cdots, b_{2k+1}, x)$$

であるから，簡単な論理変形により，

$$\mathfrak{B}_B \models \forall x < \max\{b_0, \cdots, b_{2k}, b_{2k+1}\} \, \exists \vec{v} < c \bigvee_{i \leq j} \neg \psi_i(\vec{v}, b_0, \cdots, b_{2k+1}, x)$$

を得る．これは，$b_0, \cdots, b_{2k+1}, b_{2k+2}, c$ が $\Psi(\vec{x})$ を実現することに反する．以上から，$\Psi'(a_0, \cdots, a_{2k+1}, x)$ は有限充足可能であり，求める a_{2k+2} が存在する．

さて，このようにして，A の要素の並べ上げ $a_0, a_1, \cdots$ と B' の要素の並べ上げ $b_0, b_1, \cdots$ が完成したとしよう．上の作り方の中で述べたように，$A = \{a_i : i \in \mathbb{N}\}$ であり，$B' = \{b_i : i \in \mathbb{N}\}$ が $\mathfrak{B}$ の始切片を形成することは問題ない．また，$c \notin B'$ も明らかである．次に，$h(a_i) = b_i$ によって $\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}'$ の間に関数 h を定義すると，これが同型になることは (#) からいえる．実際，原子論理式 $\varphi(x_0, \cdots, x_k)$ に対し，

$$\mathfrak{A}_A \models \varphi(a_0, \cdots, a_k) \Rightarrow \mathfrak{B}_B \models \varphi(b_0, \cdots, b_k)$$

となるから，h が演算や関係 $<$ を保存していることは明らか．また，任意の Π_{n-1} 論理式 $\varphi(x_0, \cdots, x_k)$ について

$$\mathfrak{A}_A \models \varphi(a_0, \cdots, a_k) \Leftrightarrow \mathfrak{B}_B \models \varphi(b_0, \cdots, b_k)$$

が成り立つことも (#) から容易にいえる．実際，$\Rightarrow$ は明らかである．$\Leftarrow$ については $\mathfrak{A}_A \not\models \varphi(a_0, \cdots, a_k)$ とすると，$\mathfrak{A}_A \models \neg\varphi(a_0, \cdots, a_k)$ であり，$\neg\varphi(a_0, \cdots, a_k)$ は Σ_{n-1} 論理式なので，(#) から $\mathfrak{B}_B \models \neg\varphi(b_0, \cdots, b_k)$ となり，$\mathfrak{B}_B \not\models \varphi(b_0, \cdots, b_k)$ である．他方，h が同型であることから，任意の論理式 $\varphi(x_0, \cdots, x_k)$ について，

$$\mathfrak{A}_A \models \varphi(a_0, \cdots, a_k) \Leftrightarrow \mathfrak{B}'_{B'} \models \varphi(b_0, \cdots, b_k)$$

となっているので，任意の Π_{n-1} 論理式 $\varphi(x_0, \cdots, x_k)$ について，

$$\mathfrak{B}'_{B'} \models \varphi(b_0, \cdots, b_k) \Leftrightarrow \mathfrak{B}_{B'} \models \varphi(b_0, \cdots, b_k)$$

となり，(1) が得られた． □

定理 6.3.11 (**Friedman の自己埋め込み定理**(self-embedding theorem))
$n > 0$ とし，$\mathfrak{A}$ を $\mathrm{I}\Sigma_n$ の可算超準モデルとして，$a \in A$ を任意にとる．このとき，$\mathfrak{A}$ の始切片 $\mathfrak{A}'$ で，$a \in A'$ だが $A' \subsetneq A$ となるものが存在し，任意の Π_{n-1} 論理式 $\varphi(\vec{x})$ と任意の $\vec{a}' \in A'^{<\omega}$ について

$$\mathfrak{A}'_{A'} \models \varphi(\vec{a}') \Leftrightarrow \mathfrak{A}_{A'} \models \varphi(\vec{a}')$$

となる．

証明　補題 6.3.10 において，$\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ の場合を考える．補題の (2) の条件が満たされるためには，任意の Π_{n-1} 論理式 $\varphi(\vec{v}, u)$ について，

$$\mathfrak{A}_{\{a\}} \models \exists \vec{v}\, \varphi(\vec{v}, a) \Rightarrow \mathfrak{A}_{\{a,c\}} \models \exists \vec{v} < c\, \varphi(\vec{v}, a)$$

となる c がとれればよい．いま，

$$\Phi(x) = \{ \exists \vec{v}\, \varphi(\vec{v}, a) \to \exists \vec{v} < x\, \varphi(\vec{v}, a) : \varphi(\vec{v}, u) \in \Pi_{n-1} \}$$

とおく．これは Π_n 論理式だけからなる再帰的タイプであり，明らかに有限充足可能である．よって，$\Phi(x)$ を実現する c が存在する．したがって，補題から，$\mathfrak{A}$ の始切片 $\mathfrak{A}'$ で定理の条件を満たすものが存在する． □

この定理のエッセンスは，$\mathrm{I}\Sigma_1$ の可算超準モデルは，自分と同型な始切片をもつというものである．H. Friedman は，初めこの定理をペアノ算術の可算超準モデルに対して証明し，それを上の形に拡張したのは Ressayre, Dimitracopoulos, Paris らの貢献による．因みに，非可算モデルにしたら同様の定理は成り立たないし，また $\mathrm{I}\Sigma_0$ の可算超準モデルについても一般には成り立たないことが知られている．さらにこれに関連した重要な結果として，$\mathrm{I}\Sigma_0$ の可算超準モデルは，ペアノ算術 PA のモデルとなる始切片をもつという McAloon の定理がある．

付録 往復論法

補題 6.3.10 の証明に用いた往復論法について補足しておく．往復論法は，この分野では極めて頻繁に用いられるが，その起源は Cantor にある．彼は，稠密な可算無限の線形順序が最大最小をもたなければ，有理数全体の順序と同型になるという事実をこの論法で証明した．

再帰的飽和性の定義において，タイプが再帰的であるという制限を外すと $(\omega$-$)$ 飽和性の定義が得られる．有理数の順序構造 $(\mathbb{Q}, <)$ は飽和性をもっており，次の命題は Cantor の定理の自然な拡張として得られる．

定理 6.3.12 $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ が可算な飽和構造で，$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ であれば，$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

証明 A の要素の並べ上げ $a_0, a_1, \cdots$ と B の要素の並べ上げ $b_0, b_1, \cdots$ を交互に作ってゆき，$h(a_i) = b_i$ によって $\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}$ の間に同型が定義できるようにする．いま，$a_0, a_1, \cdots, a_{2k}$ と $b_0, b_1, \cdots, b_{2k}$ が選ばれているとする．a_{2k+1} をそれまでに現れていない A の最小元として，

$$\Phi(x) = \{\varphi(b_0, b_1, \cdots, b_{2k}, x) : \mathfrak{A} \models \varphi(a_0, a_1, \cdots, a_{2k}, a_{2k+1})\}$$

を $\mathfrak{B}$ 上で実現する元を b_{2k+1} とする．次に，b_{2k+2} をそれまでに現れていない B の最小元とし，それに対応する $\mathfrak{A}$ の元を a_{2k+2} とする．こうして同型が定義できることは明らかである． □

Cantor の定理は，上の証明のタイプ $\Phi(x)$ を不等式の(有限)集合とおいて証明することができる．因みに，飽和構造は再帰的飽和であるが，逆はいえない．また，任意の無矛盾な理論が飽和モデルをもつわけではないので，一般の理論の性質を飽和モデルを用いて証明することは難しい．そこで，上の定理の再帰的飽和バージョンがほしいのだが，それを述べるためにいくつかの概念の導入が必要になる．

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ を言語 $\mathcal{L}$ の構造とする．いま，2 つの関係記号 $U_A(x), U_B(x)$ を用意し，さらに $\mathcal{L}$ のコピーを $\mathcal{L}'$ として，言語 $\mathcal{L} \cup \mathcal{L}' \cup \{U_A, U_B\}$ における構造 $\mathfrak{C}$ を考える．$\mathfrak{C}$ 上で U_A, U_B の解釈として得られる C の部分集合が A, B であって，$\mathfrak{C}$ における $\mathcal{L}$ の記号の解釈と $\mathcal{L}'$ の記号の解釈をそれぞれ A, B に加えてできる構造が $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ と一致するなら，$\mathfrak{C}$ を $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ の**モデル対**(model pair) と呼び，$(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ で表す．言語 $\mathcal{L}$ に関数記号が入っている場合，$\mathfrak{A}$ の関数を $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ でも関数とするよう

な処理が必要になるので，簡単のため関数は関係で表すことにしておこう．

上の定理と同様な議論により，次が得られる．

定理 6.3.13　$(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ が可算な再帰的飽和モデル対で，$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ であれば，$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

この証明が，定理 6.3.12 の証明と違うのは，

$\Phi(x) = \{\varphi(a_0, a_1, \cdots, a_{2k}, a_{2k+1}) \to \varphi(b_0, b_1, \cdots, b_{2k}, x)$: φ は任意の論理式$\}$,

$\Psi(x) = \{\psi(b_0, b_1, \cdots, b_{2k+1}, b_{2k+2}) \to \psi(a_0, a_1, \cdots, a_{2k+1}, x)$: ψ は任意の論理式$\}$

という再帰的タイプを使う点だけである．また，同様にして，次のこともいえる．

定理 6.3.14　$(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ が可算な再帰的飽和なモデル対で，$\mathfrak{A}$ で成り立つ否定記号なし(論理記号は $\wedge, \vee, \forall, \exists$ のみ)の文が $\mathfrak{B}$ でも成り立つならば，$\mathfrak{B}$ は $\mathfrak{A}$ の準同型像である．

この証明では，

$$\Phi(x) = \{\varphi(a_0, a_1, \cdots, a_{2k}, a_{2k+1}) \to \varphi(b_0, b_1, \cdots, b_{2k}, x) : \varphi \text{ は否定を含まない論理式}\},$$

$$\Psi(x) = \{\neg\psi(b_0, b_1, \cdots, b_{2k+1}, b_{2k+2}) \to \neg\psi(a_0, a_1, \cdots, a_{2k+1}, x) : \psi \text{ は否定を含まない論理式}\}$$

を用いる．$h(a_i) = b_i$ は，$\mathfrak{A}$ から $\mathfrak{B}$ の上への準同型になる．この定理から，構造のクラスの特徴付けに関する次の定理が得られる．尚，これは可算(再帰的)言語についての証明である．

定理 6.3.15 (Lyndon)　次の 2 条件は同値である．

（1）　$\mathrm{Mod}(T)$ は準同型像に関して閉じている．

（2）　否定記号なしの論理式からなる理論 T' が存在して，$\mathrm{Mod}(T') = \mathrm{Mod}(T)$.

証明　否定記号なしの論理式の真偽が準同型で保存されることは明らかなので，(2) → (1) はよい．逆を示すために，(1) を仮定する．いま，T から導かれる否定なしの文全体を T' として，$\mathrm{Mod}(T') = \mathrm{Mod}(T)$ をいいたい．$\mathrm{Mod}(T') \supseteq \mathrm{Mod}(T)$ は明らかだから，逆の包含関係を示せばよい．そこで，$\mathfrak{A}$ を T' の可算

モデルとする．次に，否定なし文 σ の否定 $\neg\sigma$ で，$\mathfrak{A}$ で成り立つものをすべて T に加えた理論を考えると，これは無矛盾なので可算モデル $\mathfrak{B}$ をもつ．つまり，$\mathfrak{B}$ は T の可算モデルで，そこで成り立つ否定なし文はすべて $\mathfrak{A}$ で成り立つ．いま，$(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ に対して，可算な初等的拡大となる再帰的飽和モデル対 $(\mathfrak{A}', \mathfrak{B}')$ を作る．すると，上の定理から，$\mathfrak{A}'$ は $\mathfrak{B}'$ の準同型像であることがわかる．$\mathfrak{B}'$ は T のモデルだから，$\mathfrak{A}'$ は T のモデル，したがって $\mathfrak{A}$ も T のモデルになる．□

この付録の議論は，Barwise-Schlipf [BaS] による．Barwise は，再帰的飽和構造や次節で述べる麗質モデルを用いることで，古典的な定理に対して，見通しのよい別証明が得られることを強調した．上の証明を文献 [ChK] や [Mon] に載っている初等鎖を用いた証明と比較されたい．但し，初等鎖の議論は非可算言語にも適用できるという優位点もある．

6.4　麗質モデルと充足関係

構造の再帰的飽和性は，再帰的条件を満たす“元”をいっぱい含んでいることを表しているが，この性質を関係や関数に一般化することで新たな概念を導入する．言語 $\mathcal{L}$ における構造 $\mathfrak{A}$ が“麗質性(resplendency)”をもつというのは，$\mathcal{L}$ に属さない記号列 $\vec{R}$ を含んだ論理式 $\varphi(\vec{R})$ が $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A)$ と無矛盾であれば，$\vec{R}$ を $\mathfrak{A}$ において適当に解釈して $\varphi(\vec{R})$ を真にできるというものである．算術の麗質モデルの場合，新しい関係記号として，始切片を表す関係や充足関係などをとることで，構造に内在する性質を見つけることができる．

改めて，麗質の正確な定義を与える．

定義 6.4.1　$\mathcal{L}$-構造 $\mathfrak{A}$ が**麗質**(resplendent)であるとは，任意の言語 $\mathcal{L}^+ \supseteq \mathcal{L}_A$ における文 φ について，$\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A) \cup \{\varphi\}$ が無矛盾であれば，$\mathfrak{A}$ の $\mathcal{L}^+$-拡張 $\mathfrak{A}^+$ が存在して，$\mathfrak{A}^+ \models \varphi$ となることをいう．

$\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A)\cup\{\varphi\}$ が無矛盾であることは，φ が $\mathfrak{A}$ の初等的拡大の $\mathcal{L}^+$-拡張で成り立つことと同値である．つまり，麗質構造はその初等的拡大において顕在化される関係や関数の性質を潜在的に有するものと考えられる．また φ に含まれる A の元(を示す定数)を $\vec{a}$ とするとき，この条件は $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_{\{\vec{a}\}})\cup\{\varphi\}$ が無矛盾であるということと同値である．なぜなら，$\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A)\cup\{\varphi\}$ が矛盾すれば，$\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A)$ の文 $\psi(\vec{a},\vec{b})$ が存在して，$\vdash\psi(\vec{a},\vec{b})\to\neg\varphi$ となるから，$\vdash(\exists\vec{y}\,\psi(\vec{a},\vec{y}))\to\neg\varphi$ となり，$(\exists\vec{y}\,\psi(\vec{a},\vec{y}))\in\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_{\{\vec{a}\}})$ より $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_{\{\vec{a}\}})\cup\{\varphi\}$ も矛盾している．逆は，明らかである．

有限構造は麗質である．なぜなら，有限構造の初等的拡大はそれ自身しかないからである．また，上の定義の“麗質”は再帰的飽和性の直接的な一般化にはなっていないので，さらに次の定義を導入する．

定義 6.4.2　$\mathcal{L}$-構造 $\mathfrak{A}$ が**強麗質**(strongly resplendent)であるとは，$\mathcal{L}$ の有限拡大 $\mathcal{L}^+$ ($\mathcal{L}^+=\mathcal{L}\cup\{$有限個の追加記号$\}$) における再帰的タイプ $\Phi(\vec{x})$ と任意の $\vec{a}\in A^{<\omega}$ について，$\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A)\cup\Phi(\vec{a})$ が無矛盾であれば，$\mathfrak{A}$ を $\mathcal{L}^+$-構造に拡張し，$\Phi(\vec{a})$ のモデルにできることをいう．

強麗質の定義において，タイプ $\Phi(\vec{x})$ を1つの論理式からなるものと制限すれば麗質の定義が得られ，また $\mathcal{L}^+=\mathcal{L}\cup\{c\}$ とすると再帰的飽和性の定義となる．つまり，強麗質構造は麗質かつ再帰的飽和である．また麗質の場合と同様に，$\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A)\cup\Phi(\vec{a})$ が無矛盾という条件は，$\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_{\{\vec{a}\}})\cup\Phi(\vec{a})$ が無矛盾であるという条件と一致することにも注意しておく．

我々は，ある種の自然な仮定のもとで，これら3つの性質が一致することを見ていく．

定理 6.4.3 (Barwise-Ressayre)　可算な再帰的飽和構造は強麗質である．

証明　$\mathfrak{A}$ を可算言語 $\mathcal{L}$ の可算構造で，再帰的飽和とする．さらに，$\mathcal{L}$ の有限拡大言語 $\mathcal{L}^+$ における再帰的タイプ $\Phi(\vec{x})$ と $\vec{a}\in A^{<\omega}$ が与えられてい

て，$\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A) \cup \Phi(\vec{a})$ は無矛盾であると仮定する．すると，Henkin の方法でその理論に対してモデルが作れるが，その構成で $\mathfrak{A}$ の再帰的飽和性を用いるとヘンキン定数を A の元から選ぶことができ，領域 $|\mathfrak{A}|$ を拡大せずにモデル $\mathfrak{A}^+$ を構築できるというのが以下の粗筋である．

では，$\mathfrak{A}^+$ の構成の細部を見ていく．まず，$\mathcal{L}_A^+$ における x のみを自由変数とする論理式を並べ上げて，$\{\varphi_n(x) : n \in \omega\}$ とする．このリストを用いて，A の有限部分集合の列 $A_0 = \{\vec{a}\} \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$ と $\mathcal{L}_A^+$ における再帰的理論の列 $T_0 = \Phi(\vec{a}) \subseteq T_1 \subseteq T_2 \subseteq \cdots$ を，次の条件を満たすように構成する．各 n について，

（1） T_n は $\mathcal{L}_{A_n}^+$ の文の再帰的集合で，$T_n \cup \mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A)$ は無矛盾である．

（2） ある $a \in A$ について $\varphi_n(a) \in T_{n+1}$ となるか，$\neg \exists x\, \varphi_n(x) \in T_{n+1}$ となる．

上の構成が完了したら，$T_\omega = \bigcup_n T_n$ とおく．(1) より，$T_\omega \cup \mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A)$ が無矛盾であることは明らかである．また，$\mathcal{L}_A^+$ の文 $\sigma (\equiv \varphi_n$，但し自由変数 x を含まない) について $T_\omega \nvdash \sigma$ であれば $\sigma \notin T_{n+1}$ であるから，(2) より $\neg \exists x\, \sigma \in T_{n+1}$ となり，$T_\omega \vdash \neg\sigma$ がいえる．つまり T_ω は完全であり，よって $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A) \subseteq T_\omega$ がいえる．また，$T_\omega \vdash \exists x\, \varphi_n(x)$ であれば，(2) からある $a \in A$ について $\varphi_n(a) \in T_\omega$ となる．以上によって，T_ω は完全ヘンキン理論であり，これから Henkin の方法で A を領域とする構造 $\mathfrak{A}^+$ を構成すれば，$T_\omega = \mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A{}^+)$ であり，したがって $\mathfrak{A}_A{}^+ \models \Phi(\vec{a})$ となる．

最後に，$\{A_n\}, \{T_n\}$ が構成できることを見る．A_n, T_n がすでに得られているとして $\varphi_n(x)$ をとる．$B = A_n \cup \{\varphi_n(x)$ に含まれる A の元$\}$ として

$$\Psi(x) = \{\psi(x) : \psi(x) \text{ は } \mathcal{L}_B \text{ における 1 変数の論理式で，} T_n \vdash \varphi_n(x) \to \psi(x)\}$$

とおく．このとき，$\Psi(x)$ は r. e. になるが，Craig の方法(補題 5.3.7)によって，$\mathcal{L}_B$ における再帰的タイプとして扱うことができる．

構造 $\mathfrak{A}$ は再帰的飽和だから，$\Psi(x)$ を実現する $a \in A$ がとれるか，$\Psi(x)$

の有限部分集合 $\{\psi_i(x) : i \leq j\}$ が存在して，

$$\mathfrak{A}_A \models \neg \exists x \bigwedge_{i \leq j} \psi_i(x)$$

となる．まず，前者の場合は，

$$A_{n+1} = B \cup \{a\}, \qquad T_{n+1} = T_n \cup \{\varphi_n(a)\}$$

とおけばよい．ここで確認すべきところは，$T_{n+1} \cup \mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A)$ の無矛盾性である．そのためには，T_{n+1} の定理となる $\mathcal{L}_{A_{n+1}}$-文が $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A)$ に属することを示せばよい．いま，$\psi(x)$ を $\mathcal{L}_B$ の論理式として，$T_{n+1} \vdash \psi(a)$ とする．$a \notin B$ のときは，$T_n \vdash \varphi_n(a) \rightarrow \psi(a)$ から $T_n \vdash \varphi_n(x) \rightarrow \psi(x)$ となるので，$\psi(x) \in \Psi(x)$ である．a は $\Psi(x)$ を実現しているから，$\psi(a) \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A)$ を得る．他方，$a \in B$ のときは，$T_n \vdash \varphi_n(x) \rightarrow (x = a \rightarrow \psi(x))$ と書き換え $(x = a \rightarrow \psi(x)) \in \Psi(x)$ となるから，$(a = a \rightarrow \psi(a)) \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A)$，よって $\psi(a) \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A)$ を得る．

次に，$\mathfrak{A}_A \models \neg \exists x \bigwedge_{i \leq j} \psi_i(x)$ の場合を扱う．このときは，

$$A_{n+1} = A_n, \qquad T_{n+1} = T_n \cup \{\neg \exists x\, \varphi_n(x)\}$$

とおけばよい．$T_n \vdash \neg \exists x \bigwedge_{i<j} \psi_i(x) \rightarrow \neg \exists x\, \varphi_n(x)$ は明らかだから，あとは $T_n \cup \{\neg \exists x \bigwedge_{i<j} \psi_i(x)\} \cup \mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A)$ の無矛盾性を示す．そこで ψ を $\mathcal{L}_B$ の文として，$T_n \vdash \neg \exists x \bigwedge_{i \leq j} \psi_i(x) \rightarrow \psi$ とする．帰納法の仮定より $T_n \cup \mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A)$ は無矛盾だから，$\mathcal{L}_B$ の文 $\neg \exists x \bigwedge_{i \leq j} \psi_i(x) \rightarrow \psi$ は $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A)$ に含まれる．一方，$\mathfrak{A}_A \models \neg \exists x \bigwedge_{i \leq j} \psi_i(x)$ という前提があるので，$\psi \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A)$ となる．以上によって，証明が完成した．　□

例5　前節の問題5で，$\mathfrak{A} = (A, +, \cdot, 0, 1, <)$ を $\mathrm{I}\Sigma_1$ の超準モデルとすると，$\mathfrak{A}' = (A, +, 0, 1, <)$ が再帰的飽和になることを示した．逆に，いま $\mathfrak{A}' = (A, +, 0, 1, <)$ がプレスバーガー算術の再帰的飽和なモデルで，かつ可算とする．すると，上の定理から，$\mathfrak{A}'$ は強麗質である．一方，プレスバーガー算術は完全で，その定理の集合は $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}')$ と一致するから，$\mathrm{Th}(\mathfrak{A}') \cup \mathrm{PA}$ は PA に他ならず，PA は再帰的な無矛盾集合だから，$\cdot$ の適当な解釈が存在して，$\mathfrak{A} = (A, +, \cdot, 0, 1, <)$

は，PA のモデルになる．以上をまとめれば，$\mathrm{I}\Sigma_1$ の可算モデル $\mathfrak{A} = (A, +, \cdot, 0, 1, <)$ は，掛け算の解釈を替えて，PA のモデル $\mathfrak{A}' = (A, +, \cdot', 0, 1, <)$ にできることになる(「ボタンの掛け替え定理」)．

さて，$\mathcal{L}$ が有限の場合には，麗質と強麗質が同値性になることが，次の Kleene の定理から導ける．

定理 6.4.4 (Kleene)　$\mathcal{L}$ を有限とし，$\Phi(\vec{v})$ をその再帰的タイプとする．このとき，ある有限拡大言語 $\mathcal{L}^+ \supseteq \mathcal{L}$ における論理式 $\varphi(\vec{v})$ が存在して，

(1)　$\mathcal{L}^+$ における構造 $\mathfrak{A}^+$ が $\varphi(\vec{a})$ を成り立たせれば，その $\mathcal{L}$ への縮約 $\mathfrak{A}$ は $\Phi(\vec{a})$ を成り立たせる．

(2)　$\mathcal{L}$ における無限構造 $\mathfrak{A}$ が $\Phi(\vec{a})$ を成り立たせるなら，その $\mathcal{L}^+$ への拡張 $\mathfrak{A}^+$ で $\varphi(\vec{a})$ を成り立たせるものが存在する．

前章において，$\mathrm{Q}_<$ (もしくは Q) のような弱い算術でも，すべての再帰的集合が表現可能であり (定理 5.2.10)，また算術のメタ数学が展開できることを見た．ここでは，一般の $\mathcal{L}$-構造についてのメタ数学的議論を形式化することになるが，それも $\mathrm{Q}_<$ で可能であり，したがって $\mathrm{Q}_<$ を含むように言語を拡大しておけば，$\mathcal{L}$-構造に関する論理式の再帰的タイプは 1 つの論理式で表現できるようになる．

証明　基本的な考え方としては，$\mathcal{L}$ に $\mathrm{Q}_<$ の言語 $\mathcal{L}_{\mathrm{OR}}$ を加えることで $\mathcal{L}$ 構造についてのメタ数学的議論を数学的議論に (オブジェクト言語に) するわけだが，そのとき自然数の領域を $\mathcal{L}$-構造の外に作るのではなく，領域の一部を自然数の世界に見立てて，算術の仕組みを取り込むことになる．いま，拡大言語 $\mathcal{L}^+$ は，$\mathcal{L}$ に次の記号を加えたものとする：

$$N(x), +, \cdot, 0, 1, <, \mathit{Eval}(n, x), \mathit{Sat}(n, x), \pi(x, i).$$

ここで，$N(x)$ は算術の領域を，$\mathit{Eval}(n, x)$ は $\mathcal{L}$ の項の値を求める関数を表し，$\mathit{Sat}(n, x)$ は $\mathcal{L}$-構造の充足関係を，そして $\pi(x, i) = x_i$ は無限列

$(x_0, x_1, \cdots)$ のコード x から i-成分 x_i を取り出す射影関数を表す．

$\mathcal{L}$ における再帰的タイプ $\Phi(\vec{v})$ の意味を，$\mathcal{L}^+$ の論理式 $\varphi(\vec{v})$ として表現したいわけだが，それをここでは6つの構成要素 σ_i $(i=1,\cdots,6)$ に分けて説明する．σ_i $(i=1,\cdots,5)$ はそれぞれ1つの文であり，σ_6 は変数 $\vec{v}$ を含んだ論理式，そして

$$\varphi(\vec{v}) = \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \cdots \wedge \sigma_6$$

とする．

1．σ_1 は，$N(x)$ の基本性質を表す次の文である．

$$N(0) \wedge N(1) \wedge \forall x \forall y\,(N(x) \wedge N(y) \to N(x+y) \wedge N(x\cdot y)).$$

2．σ_2 は $(N, +, \cdot, 0, 1, <) \models \mathrm{Q}_<$ を表す．すなわち，$\mathrm{Q}_<$ の8つの公理に対し，それらの量化記号をすべて N に制限した文を作り，連言記号 $\wedge$ でつないだものである．例えば，A 7.5 に対しては，

$$\forall x\,(N(x) \to (x \neq 0 \to \exists y\,(N(y) \wedge y+1=x))).$$

$\mathrm{Q}_<$ において，N 上のすべての原始再帰的関数が表現可能であるから，$\mathcal{L}$ の項や論理式に対するゲーデル数も N の要素として自由に扱える．

3．σ_3 は，射影関数 $\pi(x, i)$ に関するもので，簡単のため変数 i, j は N の上だけを動くとして，次の文で与えられる：

$$\forall x\,\forall i\,\forall z\,\exists y\,(\forall j \neq i\,(\pi(y,j) = \pi(x,j)) \wedge \pi(y,i) = z).$$

この y は，$x = (x_0, x_1, \cdots)$ の i 番目の要素を z に置き換えてできる列のコードを表す．以下この y を $x[z/i]$ と書くことにする．（注．y は1通りに定まると主張していないのでこの書き方は多少雑ではあるが，必要に応じて正確な表現に直すのは容易である．）そして，$0[u_0/\bar{0}][u_1/\bar{1}]\cdots[u_{k-1}/\overline{k-1}]$ を $(u_0, u_1, \cdots, u_{k-1})$ と書く．σ_3 は無限列一般の存在を主張するものではないが，有限部分については任意に指定できることがわかる．

4．σ_4 は，$\mathcal{L}$ の項の値を求める関数 $Eval(n, x)$ を記述する次の文の連言である：$\mathcal{L}$ の変数を $w_0, w_1, \cdots$ として，

$$\forall i (\in N)\,\forall a\,(Eval(\ulcorner w_i \urcorner, a) = \pi(a, i)).$$

$\mathcal{L}$ の各 m 変数関数記号 f について，

$$\forall t_0, \cdots, t_{m-1} (\in N)\ \forall a\ (Eval(\ulcorner f(t_0, \cdots, t_{m-1})\urcorner, a) = f(Eval(\ulcorner t_0\urcorner, a,), \cdots, Eval(\ulcorner t_{m-1}\urcorner, a))).$$

5. σ_5 は，$\mathcal{L}$-構造の充足関係 $Sat(n, x)$ を記述するもので，以下のような文からなる．まず，$\mathcal{L}$ の各 n 項関係記号 R (等号を含む)について，

$$\forall t_0, \cdots, t_{n-1}\ \forall a\ (Sat(\ulcorner R(t_0, \cdots, t_{n-1})\urcorner, a) \leftrightarrow R(Eval(\ulcorner t_0\urcorner, a), \cdots, Eval(\ulcorner t_{m-1}\urcorner, a))).$$

そして，各論理記号について，

$$\forall a\ (Sat(\ulcorner \psi_0 \wedge \psi_1\urcorner, a) \leftrightarrow (Sat(\ulcorner \psi_0\urcorner, a) \wedge Sat(\ulcorner \psi_1\urcorner, a,))),$$

$$\forall a\ (Sat(\ulcorner \exists w_i\, \psi\urcorner, a) \leftrightarrow \exists b\, Sat(\ulcorner \psi\urcorner, a[b/i]))$$

などである．

6. σ_6 は $\Phi(\vec{v})$ を Sat を使って表現する論理式である．再帰的タイプ $\Phi(\vec{v})$ に対し，そのゲーデル数の集合を $\mathrm{Q}_<$ で表現する論理式を $\gamma(n)$ とおき，σ_6 を次の論理式とする：

$$\forall n \in N\ (((N, +, \cdot, 0, 1, <) \models \gamma(\bar{n})) \to Sat(n, \vec{v})).$$

こうして得られた $\varphi(\vec{x})$ が，定理の条件を満たすことを調べる．まず，条件 (1) をいうため，$\mathcal{L}^+$ における構造 $\mathfrak{A}^+$ が $a = (a_0, \cdots, a_{l-1})$ によって $\varphi(\vec{v})$ を成り立たせているとして，その $\mathcal{L}$ への縮約 $\mathfrak{A}$ をとる．$\Phi(\vec{v})$ に属する各 $\psi(\vec{v})$ に対して，$\mathrm{Q}_< \vdash \gamma(\overline{\ulcorner\psi(\vec{v})\urcorner})$ であるから，σ_2, σ_6 により，

$$\mathfrak{A}^+ \models Sat(\ulcorner\psi\urcorner, a)$$

となる．さらに，

$$\mathfrak{A}^+ \models Sat(\ulcorner\psi\urcorner, a) \leftrightarrow \psi(a_0, \cdots, a_{l-1})$$

であることも，σ_4, σ_5 を使って論理式 ψ の構成に関するメタ帰納法で証明できる．よって，

$$\mathfrak{A}^+ \models \psi(a_0, \cdots, a_{l-1})$$

だから，$\mathfrak{A}$ においても $\psi(a_0, \cdots, a_{l-1})$ が成り立つ．$\psi(\vec{v}) \in \Phi(\vec{v})$ は任意だから，$\mathfrak{A}$ は $\Phi(\vec{a})$ を実現し，条件 (1) がいえた．

逆に，$\mathcal{L}$ における無限構造 $\mathfrak{A}$ が $\Phi(\vec{a})$ を実現しているとする．このとき，$|\mathfrak{A}|$ の可算無限集合 N を選び，$(N, +, \cdot, 0, 1, <)$ が自然数論の標準構造と同型になるように N 上で $+, \cdot, 0, 1, <$ を定める．N の外でも演算 $+, \cdot$ は適当な値をとるようにしておく．すると，σ_1, σ_2 は明らかに成立している．また，A は無限集合だから，その有限列全体 $A^{<\omega}$ との間に1対1の対応があり，したがって有限個を除いて0であるような無限列の全体 $B \subset A^{\omega}$ とも1対1の対応がある．いま，$h: A \to B$ を全射として，$\pi(a, i)$ を $h(a) = (b_0, b_1, \cdots)$ の i 番目の要素 b_i を値とする関数と定めれば，σ_3 が成り立つ．さらに，$Eval(\ulcorner t \urcorner, a)$ は項 t の a における値とし，また充足関係 $Sat(n, x)$ を

$$Sat(\ulcorner \psi \urcorner, a) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \psi(a_0, \cdots, a_{l-1})$$

で導入すれば，σ_4, σ_5 がいえる．最後に，σ_6 については，

$$(N, +, \cdot, 0, 1, <) \models \gamma(\overline{\ulcorner \psi \urcorner}) \Leftrightarrow \psi(\vec{v}) \in \Phi(\vec{v})$$
$$\Leftrightarrow \psi(a_0, \cdots, a_{l-1}) \Leftrightarrow Sat(\overline{\ulcorner \psi \urcorner}, a)$$

となり，やはり成り立つ．よって，条件 (2) がいえた． □

系 6.4.5 (Barwise) 有限言語 $\mathcal{L}$ における麗質構造は，強麗質したがって再帰的飽和である．

証明 $\mathcal{L}$ を有限言語とし，$\mathfrak{A}$ をその麗質構造とする．$\mathfrak{A}$ が有限であれば強麗質であることはすでにわかっているので，$\mathfrak{A}$ は無限と仮定してよい．いま，強麗質の定義に沿って，$\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A) \cup \Phi(\vec{a})$ が無矛盾となる再帰的タイプ $\Phi(\vec{v})$ が与えられたとする．Kleene の定理 6.4.4 によって，$\varphi(\vec{v})$ を作る．すると，$\Phi(\vec{a})$ を実現する $\mathfrak{A}$ の初等的拡大において，$\varphi(\vec{a})$ が成り立ち，麗質性からそれは $\mathfrak{A}$ の拡張において成り立つ．よって，$\Phi(\vec{a})$ も $\mathfrak{A}$ の拡張において成り立つ． □

いま，算術構造 $\mathfrak{A}$ に対する Kleene の定理について考えてみよう．$\mathcal{L}$ が最

初から算術の言語 $\mathcal{L}_{\mathrm{OR}}$ を含んでいて，$\mathcal{L}$-構造 $\mathfrak{A}$ が $\mathrm{Q}_<$ のモデルになっているなら，敢えて $+, \cdot, 0, 1, <, Eval(n, x), \pi(x, i)$ を加える必要はない．Kleene の定理の証明を行うには，$N(x), Sat(n, x)$ を用いれば十分である．$\mathfrak{A}$ が麗質構造であれば，$N(x), Sat(n, x)$ を $\mathfrak{A}$ の関係として導入できることがわかるが，このときそれらにいろいろな条件を加えて $\mathfrak{A}$ の性質を導くことができる．代表的な応用を次に述べよう．

定理 6.4.6 ペアノ算術 PA の任意の可算麗質モデル $\mathfrak{A}$ に対し，自分と同型な(真の)始切片が存在して，$\mathfrak{A}$ はその始切片の初等的拡大になる．

証明 算術の言語 $\mathcal{L}_{\mathrm{OR}}$ に，$N(x), Sat(n, x)$ の他，N の充足関係を表す $Sat_N(n, x)$ および同型を表す $f(x)$ を加える．そして，N が全体 $\mathfrak{A}$ と同型な始切片で，かつその初等的部分構造になっているという主張を考えると，これは前節の Friedman の定理より $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A)$ と無矛盾であるから，麗質性より N が $\mathfrak{A}$ の始切片として実現できる． □

定理 6.4.7 ペアノ算術 PA の麗質モデル $\mathfrak{A}$ に対して，充足関係 Sat が存在し，Tarski の真理条項(定理 6.4.4 の証明における σ_4, σ_5)を満たし，かつ $(\mathfrak{A}, Sat)$ は $\mathcal{L}_{\mathrm{OR}} \cup \{Sat\}$ の論理式について帰納法を満たす．逆に，ペアノ算術 PA のモデル $\mathfrak{A}$ にそのような Sat が存在すれば，$\mathfrak{A}$ は，再帰的飽和であり，したがって可算であれば，麗質である．

証明 前半は，$\mathcal{L}_{\mathrm{OR}} \cup \{Sat\}$ の帰納法を表す文全体の再帰的集合が，$\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A)$ と無矛盾であることからすぐに導ける．後半は，補題 6.3.5 とそのあとの注意書きより明らか． □

付録 麗質モデルの応用

古典的な定理に対して麗質性を応用した証明を 1 つあげる．ここでの議論も基本的に Barwise と Schlipf [BaS] によるものである．

定理 6.4.8 (**Robinsonの無矛盾性定理**(consistency theorem)) $\mathcal{L}=\mathcal{L}_1\cap\mathcal{L}_2$ とし，T を言語 $\mathcal{L}$ の完全理論，T_1, T_2 をそれぞれ言語 $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ における T の拡大とする．このとき，$T_1\cup T_2$ が無矛盾であるための必要十分条件は，T_1, T_2 がそれぞれ無矛盾になることである．

証明 必要性は明らかなので，十分性を示す．いま T_1, T_2 が無矛盾で，$T_1\cup T_2$ が矛盾すると仮定する．$T_1\cup T_2$ が矛盾しているから，有限集合 $S_1\subseteq T_1$ と $S_2\subseteq T_2$ が存在して，$S_1\cup S_2$ からも矛盾が導ける．S_1, S_2 をそれぞれ有限言語 $\mathcal{L}'_1, \mathcal{L}'_2$ の理論とし，さらに $\mathcal{L}'=\mathcal{L}'_1\cap\mathcal{L}'_2$ とおく．そして，T から導かれる $\mathcal{L}'$ 文全体を T' とすると，当然この T' は $\mathcal{L}'$ において完全な無矛盾集合である．さらに，$S'_1=S_1\cup T'$, $S'_2=S_2\cup T'$ とおくと，これらはそれぞれ T_1, T_2 の部分集合だから無矛盾である．

いま，T' の可算麗質モデル $\mathfrak{A}$ を考える．T' は完全なので，$T'=\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ である．$S'_1=S_1\cup\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ の無矛盾性と $\mathfrak{A}$ の麗質性より，$\mathfrak{A}$ は S_1 のモデルとなる $\mathcal{L}'_1$-構造 $\mathfrak{A}_1$ に拡張できる．同様に，$\mathfrak{A}$ は S_2 のモデルとなる $\mathcal{L}'_2$ の構造 $\mathfrak{A}_2$ に拡張できる．そこで，$\mathcal{L}'_1-\mathcal{L}'$ の記号解釈を $\mathfrak{A}_1$ と同じとし，$\mathcal{L}'_2-\mathcal{L}'$ の記号解釈を $\mathfrak{A}_2$ と同じとして，$\mathfrak{A}$ を $\mathcal{L}'_1\cup\mathcal{L}'_2$ の構造 $\mathfrak{A}'$ に拡張する．すると，この $\mathfrak{A}'$ は $S_1\cup S_2$ のモデルになるので，$S_1\cup S_2$ は無矛盾となり，仮定に反する．よって，十分性も証明された． □

系 6.4.9 (**Craigの補間定理**(interpolation theorem)) 文 $\varphi\to\psi$ が論理の公理だけから証明可能($\vdash\varphi\to\psi$)ならば，φ と ψ に共通して含まれる記号と論理記号($=$ を含む)で構成される文 θ が存在して $\vdash\varphi\to\theta$ かつ $\vdash\theta\to\psi$ となる．

上の定理を満たす文 θ は，φ と ψ の**補間文**(interpolant)と呼ばれる．φ と ψ に共通して含まれる記号が全くなくても，等式 $=$ から論理式が作れるので，補間文の候補がなくなるわけではないことに注意しておく．

証明 $\vdash\varphi\to\psi$ で，補間文 θ が存在しないとする．そこで，φ と ψ に共通の記号よりなる言語 $\mathcal{L}$ の文 ξ で，$\vdash\varphi\to\xi$ となるものを集めて T_0 とおくと，T_0 のどの有限部分も ψ を含意しないので，$T_0\cup\{\neg\psi\}$ は無矛盾である．いま，$T_0\cup$

$\{\neg\psi\}$ のモデルを $\mathfrak{A}$ として，T を $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ に含まれる $\mathcal{L}$ 文の全体とおく．すると，もちろん $T\cup\{\neg\psi\}$ は無矛盾であるが，$T\cup\{\varphi\}$ が無矛盾であることも次のようにわかる．$T\cup\{\varphi\}$ が矛盾するとすれば T の文 σ が存在して $\vdash\varphi\to\neg\sigma$ であるが，そうすると $\neg\sigma\in T_0\subseteq T$ となって，T 自身が矛盾する．ここで Robinson の無矛盾性定理により，$T\cup\{\varphi,\neg\psi\}$ も無矛盾である．これは，$\vdash\varphi\to\psi$ という仮定に反する．　□

7

実数論　代数編

本章では，実数の順序体 $\mathfrak{R}=(\mathbb{R},+,-,\cdot,/,0,1,<)$ についての代数的な性質を調べる．1920 年代に Artin と Schreier によって始められた実数の代数構造の研究は，その後 Tarski とその弟子たちによって整理され，また一般化されて，数学基礎論の一つの大きな流れを形成していく．基礎論の研究としての重要なポイントは，実閉体の理論が完全であるという結果に留まらず，文の真偽を決定するアルゴリズムの改良に力を注いできたことであり，最近は工学方面からもこの決定アルゴリズムが広く注目されるようになってきた．しかし，紙数の都合上，アルゴリズムの効率についての考察は他書に譲り，ここでは Tarski の定理の証明をなるべく詳しく解説したい．

7.1 実係数の1変数多項式

本節は，実数論のウォーミングアップとして，実数を係数とする1変数多項式の基本的な性質を見る．以下の諸定理は，それらの主張を見る限り，解析学の初歩と何ら変わるところはないが，その証明には解析的な概念(例．lim)が全く使われていないことに注意されたい．すなわち，これらの定理は，次節で導入する実閉順序体の定理でもある．

最初に「代数学の基本定理」を仮定する．この定理は，どんな複素係数の多項式 $P(x)$ も1次式の積で表せることを主張する．しかし，この定理に依存する部分は次節以降の議論で消去できるので，ここでは「代数学の基本定理」を証明なしに仮定しておく．なお，この定理に対する1つの厳密な証明を次章で与える．

補題 7.1.1 最高次の係数が1であるような実係数の多項式 $P(x)$ は，実係数の1次式 $x+a$ と2次式 x^2+bx+c (但し $b^2<4c$) の積で表せる．

証明 「代数学の基本定理」を仮定すると，どんな実多項式 $P(x)$ も，複素数を使って1次式の積で表せる．任意の複素数 z とその共役複素数 $\bar{z}$ に対して，$P(\bar{z})=\overline{P(z)}$ であるから，複素数 z が $P(z)$ の根なら，$\bar{z}$ も根になり，$P(x)$ は2次式 $(x-z)(x-\bar{z})=x^2-(z+\bar{z})x+z\bar{z}$ を因子にもつ．このとき，$z=r+is$ ($i=\sqrt{-1}$, $r,s\in\mathbb{R}$) とおいて，$z+\bar{z}=2r$ と $z\bar{z}=r^2+s^2$ が実数になること，また $(z+\bar{z})^2-4z\bar{z}=(z-\bar{z})^2=(2is)^2=-4s^2<0$ となることに注意する． □

定理 7.1.2 (中間値の定理) $P(x)$ を実係数の多項式とする．いま，$a<b$ を2つの実数として，$P(a)P(b)<0$ とする．このとき，$P(c)=0$ となる c が区間 (a,b) の中にある．

証明 与えられた多項式 $P(x)$ の最高次の係数が1であると仮定しても，一般性を失わない．このとき，補題7.1.1より $P(x)$ は1次式 $x+r$ と2次式 x^2+sx+t (但し $s^2<4t$) の積で表せる．2次式 x^2+sx+t については，

$$x^2+sx+t=\left(x+\frac{s}{2}\right)^2+\frac{4t-s^2}{4}>0$$

により，常に正である．したがって，$P(a)P(b)<0$ とすれば，どれかの1次因子 $x+r$ について，$a+r$ と $b+r$ の符号が異なるはずである．いま，$a<b$ であるから，$a<-r<b$ の可能性しかなく，$c=-r$ として，$P(c)=0$ を得る． □

定理 7.1.3 多項式 $P(a)>0$ ならば，ある $\varepsilon>0$ が存在して，区間 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ において $P(x)>0$ となる．

証明 上の定理と同様に，与えられた多項式 $P(x)$ の最高次の係数が1であると仮定し，それを1次式と2次式の積に分解し，さらに1次因子を $x-r_1, \cdots, x-r_m$ とする．$|a-r_1|, \cdots, |a-r_m|$ の最小値より小さな正数 $\varepsilon>0$ をとれば，区間 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ において $x-r_1, \cdots, x-r_m$ の符号は変わらないから，$P(x)>0$ となる． □

補題 7.1.4 $P(x)$ を実係数の多項式とし，$P'(x)$ をその微分とする．$P'(a)>0$ ならば，ある $\varepsilon>0$ が存在し，区間 $(a-\varepsilon, a)$ において $P(x)<P(a)$ となり，区間 $(a, a+\varepsilon)$ において $P(a)<P(x)$ となる．

証明 $P(x)-P(a)$ は $x-a$ で割り切れるので，その商 $(P(x)-P(a))/(x-a)$ を $Q(x)$ とおく．$P(x)=x^n$ のとき，$Q(x)=x^{n-1}+ax^{n-2}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1}$ で $Q(a)=na^{n-1}$ となるから，同様に一般の $P(x)$ に対しても $Q(a)=P'(a)>0$ となることが容易にわかる．すると，定理7.1.3から，ある $\varepsilon>0$ が存在し，区間 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ において $Q(x)$

>0 となる．$Q(x)$ の定義から，区間 $(a-\varepsilon, a)$ において $P(x)<P(a)$ となり，区間 $(a, a+\varepsilon)$ において $P(a)<P(x)$ となることがわかる．□

定理 7.1.5（**Rolle の定理**）　$P(x)$ を実係数の多項式とし，$P'(x)$ をその微分とする．いま，$a<b$ として，$P(a)=P(b)$ とする．このとき，$P'(c)=0$ となる c が区間 (a, b) の中にある．

証明　簡単のため，$P(a)=P(b)=0$ とする．さらに，a, b の間に $P(x)=0$ の解がない，つまり a, b がその隣合う解であるとしても一般性を失わない．いま，$P(x)=(x-a)^m(x-b)^nQ(x)$ と表す（$m\geq 1$，$n\geq 1$）．ここで，$Q(a)\neq 0$，$Q(b)\neq 0$ であるが，(a, b) において $Q(x)\neq 0$ だから，中間値の定理の対偶より $Q(a)\cdot Q(b)>0$ となる．$P(x)$ の微分を求めると，

$$P'(x)=(x-a)^{m-1}(x-b)^{n-1}R(x),$$

但し，

$$R(x)=(m(x-b)+n(x-a))Q(x)+(x-a)(x-b)Q'(x).$$

すると，

$$R(a)\cdot R(b)=-mn(a-b)^2Q(a)Q(b)<0$$

だから，中間値の定理より，$R(c)$ となる c が区間 (a, b) の中にある．このとき，$P'(c)=0$ となり，定理が証明された．□

定理 7.1.6　$P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0$ を実係数の多項式とする．M を $|a_{n-1}|, |a_{n-2}|, \cdots, |a_1|, |a_0|$ の最大値とおく．すると，$P(x)=0$ のすべての実解は，区間 $(-M-1, M+1)$ の中にある．

証明　$|x|\geq M+1$ とする．このとき，

$$|P(x)-x^n|\leq M(|x|^{n-1}+|x|^{n-2}+\cdots+|x|+1)=M\frac{|x|^n-1}{|x|-1}\leq |x|^n-1$$

である．$P(x)=0$ とおくと上の不等式は成り立たないので，$P(x)=0$ は

$|x| \geq M+1$ で解をもたないことがわかる. □

次の定理を述べるためには，多少準備が必要である．$P(x)$ を実係数の多項式とする．$P_0 = P$, $P_1 = P'$ とおき，さらに $P_2, P_3, \cdots$ を以下のように定める．

P_{i+2} は P_i を P_{i+1} で割った余りに -1 を掛けたもの.

すなわち $P_i = Q_{i+1}P_{i+1} - P_{i+2}$ とする.

このとき，各 $a \in \mathbb{R}$ に対して，

$$P_0(a), P_1(a), P_2(a), \cdots$$

を**スツルム列**(Sturm sequence)と呼び，そこで符号 (+, −) の交代が生じる回数を $\omega_P(a)$ で表す．例えば，スツルム列 $(1, 0, 2, -1, 0, 1)$ における符号交代数は 2 である．

定理 7.1.7 (**Sturm の定理**) $P(x)$ を実係数の多項式とし，$a < b$ かつ $P(a) \cdot P(b) \neq 0$ とする．このとき，$|\omega_P(a) - \omega_P(b)|$ は，$P(x)$ が区間 (a, b) の中でもつ(異なる)根の個数である．

証明は，[高木], [Lan], [Jac], [vdW] をご覧いただきたい．ここで述べておきたいことは，これから証明する Tarski の定理が，この定理の一般化になっていることである．Sturm の定理は，多項式がある区間 (a, b) の中でいくつの解をもつかを具体的な数式で与える．それに対して，Tarski の定理は，順序体の言語で表現されたどんな条件も，等号と不等号の命題結合だけで表せることを主張する．

7.2 実閉順序体

本節では，実閉順序体の公理系を導入し，そのモデルの基本的な性質を証明する．順序体は，順序環の記号集合 $\mathcal{L}_{OR} = (+, \cdot, 0, 1, <)$ でも原理的

に扱うことができるが，マイナス記号 $-$ と割り算 y/x を予め言語に加えておく方が便利である．(但し，我々は全域的な演算のみを扱うので，便宜的に $x/0=0$ とおく．) 以下では，順序体の言語 $\mathcal{L}_{\mathrm{OF}}=(+,-,\cdot,/,0,1,<)$ を用いて，公理系を定める．

定義 7.2.1　**体**(field)の理論 AF は，体の言語 $\mathcal{L}_{\mathrm{AF}}=(+,-,\cdot,/,0,1)$ における以下の公理よりなる：

$$x+0=x,\qquad x+y=y+x,$$

$$x+(y+z)=(x+y)+z,\qquad x+(-x)=0,$$

$$x\cdot 0=0,\qquad x\cdot 1=x,\qquad x\cdot y=y\cdot x,\qquad x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z,$$

$$x/0=0,\qquad x\neq 0\to x\cdot(y/x)=y,$$

$$1\neq 0,\qquad x\cdot(y+z)=(x\cdot y)+(x\cdot z).$$

順序体(ordered field)の理論 OF は，順序体の言語 $\mathcal{L}_{\mathrm{OF}}=(+,-,\cdot,/,0,1,<)$ における理論で，AF に以下の公理を加えたものである：

$$<\text{ は線形順序},\qquad 0<1,$$

$$(x>0\wedge y>0)\to(x+y>0\wedge xy>0).$$

実閉順序体(real-closed ordered field)の理論 RCOF は，OF に以下の公理図式を加えたものとする：

$$\begin{aligned}&\forall x_0\,\forall x_1\cdots\forall x_n\,\forall y\,\forall z\,((y<z\wedge\\&\qquad x_0+x_1y+\cdots+x_ny^n<0<x_0+x_1z+\cdots+x_nz^n)\\&\qquad\Rightarrow\exists u\,(y<u<z\wedge x_0+x_1u+\cdots+x_nu^n=0))\quad(n>0).\end{aligned}$$

この定義では，中間値の定理の形を使って実閉性を定義しているが，これと少し違った形式化として，平方根の存在と奇数次の多項式の根の存在を公理とするものがある．特に，(順序なしの)**実閉体**(real-closed field)の理論 RCF を定義するときにはそうせざるを得ないが，本書では RCF の公理系を直接導入せず，構造としての実閉体は実閉順序体の縮約と定める．

例 1 実数の順序体 $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, +, -, \cdot, /, 0, 1, <)$ は，RCOF の標準モデルである．また，有理数の順序体 $\mathfrak{Q}$ に，代数的実数(整係数多項式の解になる実数)をすべて加えたものも実閉順序体になる．後者は可算モデルであり，RCOF のどんなモデルもこれと同型な部分構造を含んでいる．

前節で実数の順序体 $\mathfrak{R}$ について証明した補題や定理は，すべて任意の実閉順序体について成り立っている．前節の議論でただ 1 つ問題なのが補題 7.1.1 における代数学の基本定理の使用である．この定理は RCOF において証明可能ではあるが，簡単ではないので，次の点に注意して，その使用を避けよう．まず，定理 7.1.2 は RCOF の公理になるので証明の必要はない．定理 7.1.3 については，補題 7.1.1 によらない証明を与える．

定理 7.2.2 (定理 7.1.3 再掲) 任意の順序体において，多項式 $P(a) > 0$ ならば，ある $\varepsilon > 0$ が存在して，区間 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ において $P(x) > 0$ となる．

証明 $P(x)$ が定数のとき題意は明らかなので，いまその次数を $N > 0$ とし，係数の絶対値の最大値を $M > 0$ とおく．$P(x+a) - P(a)$ は定数項を含まない多項式であり，$|x| \leq 1$ に対し $|P(x+a) - P(a)| \leq NM|x|$ である．したがって，$\varepsilon = \min\{1, |P(a)|/NM\}$ とおけば，$|x| < \varepsilon$ に対して $|P(x+a) - P(a)| < |P(a)|$ となる．$P(a) > 0$ だから，$P(x+a) > 0$ でなければこの不等式は成り立たない． □

すべての体が代数的閉体に埋め込めること，さらに代数的閉包をもつことを第 4 章で問題 8 として示した．これと類似の結果として，すべての順序体が実閉順序体に埋め込めること，さらに実閉包をもつことがいえる．しかし，代数的閉体の構成をそのまま真似して，直接に実閉体を作ることは難しい．ここでは，前もって代数的閉体を作っておいて，その中に実閉体を作る作業を行う．

定理 7.2.3 (Artin-Schreier)　すべての順序体は，実閉順序体に埋め込める．

証明　$\mathfrak{K}$ を順序体とし，$P(x)$ を $\mathfrak{K}$ 係数の多項式で，中間値の定理を成り立たせない最小次数のものとする．すなわち，$a < b \in K$ が存在して，$P(a)P(b) < 0$ であり，$P(c) = 0$ となる $c \in (a, b)$ はないとする．このとき，$P(x)$ は既約である．そうでないと，$P(x) = Q(x)R(x)$ と分解でき，$Q(a)Q(b) < 0$ か $R(a)R(b) < 0$ である．もし $Q(a)Q(b) < 0$ であれば，$P(x)$ の最小性から $Q(c) = 0$ となる $c \in (a, b)$ が存在し，この c に対して $P(c) = 0$ となるから矛盾である．$R(a)R(b) < 0$ の場合も同様である．

$\mathfrak{K}[x]$ を $\mathfrak{K}$ の多項式がなす可換環とし，その上に $P(x)$ を法とする同値関係 $\approx$ を定める．すなわち，$Q(x) \approx R(x) \Leftrightarrow$ “$Q(x) - R(x)$ は $P(x)$ で割り切れる”．その同値類(剰余類)全体がなす剰余代数を $\mathfrak{K}[x]/P(x)$ とおく．このとき，$\mathfrak{K}[x]/P(x)$ も可換環であることは殆ど自明だが，さらに体になることも次のようにしていえる．$\mathfrak{K}[x]/P(x)$ において，$[Q(x)]_{\approx} \neq 0 = [P(x)]_{\approx}$ とする．$P(x)$ は既約だから，$Q(x)$ と $P(x)$ は互いに素であり，$R(x)Q(x) + S(x)P(x) = 1$ となる $R(x)$ と $S(x)$ が存在することが(互除法を使って)いえる．すると，$[R(x)]_{\approx}[Q(x)]_{\approx} = 1$ となっているので，$[Q(x)]_{\approx}$ は乗法逆元 $[R(x)]_{\approx}$ をもつ．

いま，一般性を失わず，$P(a) < 0$, $P(b) > 0$ としてよい．そして，

$$A = \{a' \in [a, b] : \exists x \in [a, b]\,(a' \leq x \wedge P(x) < 0)\},$$
$$B = [a, b] - A$$

とおく．このとき，A が最大値をもたないこと，B が最小値をもたないことは，$P(x)$ が根をもたないことと定理 7.2.2 からいえる．

さて，$\mathfrak{K}[x]/P(x)$ の元 $[Q(x)]_{\approx}$ に対する代表元 $Q(x)$ は，$P(x)$ より小さな次数をもつとしてよいから，$Q(x)$ については中間値の定理が成り立っ

ている．その実根の個数は $Q(x)$ の次数以下であり，2つの隣合う実根に挟まれた区間では $Q(x)$ は符号を変えない．したがって，十分近くの $a' \in A$, $b' \in B$ をとれば，$Q(x)$ の符号は (a', b') で一定であり，その符号をもって $[Q(x)]_{\approx}$ の符号とする．こうして導入した順序のもとで，$\Re[x]/P(x)$ が $\Re$ の拡大順序体になることが以下のようにいえる．

まず，$\Re[x]/P(x)$ が $\Re$ を部分構造として含むことは明らかである．$\Re[x]/P(x)$ の順序が線形で，かつ正数部分が $+$ で閉じていることも容易にわかる．あとは，正数部分が $\cdot$ で閉じていること，つまり $[Q(x)]_{\approx} > 0 \wedge [R(x)]_{\approx} > 0 \rightarrow [Q(x)R(x)]_{\approx} > 0$ をいえばよい．ここで，$Q(x), R(x)$ は $P(x)$ より小さな次数をもつ多項式としてよい．さらに $Q(x)R(x) = S(x)P(x) + T(x)$ として，$S(x), T(x)$ も $P(x)$ より小さな次数をもつ多項式とする．すると $a' \in A$, $b' \in B$ がとれて $Q(x), R(x), S(x), T(x)$ はすべて (a', b') で一定符号であるとしてよい．このとき，$Q(x)R(x)$ は常に正で，$S(x)P(x)$ は必ず符号を変えるので，$T(x)$ は常に正である．すなわち，$[Q(x)R(x)]_{\approx} = [T(x)]_{\approx} > 0$.

次に，$\Re[x]/P(x)$ が(順序を除けば) $\Re$ の代数的閉包 $\bar{\Re}$ に埋め込めることを示す．いま，$\bar{\Re}$ の元 u について $P(u) = 0$ が成り立っているとしよう．このとき，$I = \{Q \in \Re[x] : Q(u) = 0\}$ とおくと，これがイデアルである($Q_1 + Q_2$ および任意の R との $R \cdot Q$ に関して閉じている)ことは容易にわかる．さらに，$P(x)$ はこれに属し，$P(x)$ より次数の小さなものは属さないから，$P(x)$ はその生成元である．(つまり，$Q(u) = 0$ であれば，$Q(x) = R(x)P(x)$ と書ける．) そこで，準同型 $f : \Re[x] \rightarrow \Re[u]$ を $f(Q(x)) = Q(u)$ によって定める．I は f のカーネル $\mathrm{Ker}(f) = \{Q : f(Q(x)) = 0\}$ に他ならないから，準同型定理から次がいえる．

$$\Re[x]/P(x) \cong \Re[x]/\mathrm{Ker}(f) \cong \Re[u].$$

最左辺は体であることがわかっているから，最右辺 $\Re[u]$ も体になり，これは u による拡大体 $\Re(u)$ と一致する．$\Re(u)$ は $\bar{\Re}$ の部分体であるから，

$\mathfrak{K}[x]/P(x)$ は $\bar{\mathfrak{K}}$ に埋め込める．したがって，$\bar{\mathfrak{K}}$ は $\mathfrak{K}[x]/P(x)$ の代数的閉包でもある．

さて，$\bar{\mathfrak{K}}$ の部分体でうまく順序を入れれば $\mathfrak{K}$ の拡大順序体になるようなもの全体のクラスを考える．Zorn の補題(選択公理)によって，このクラスにおける極大な順序体 $\mathfrak{L}$ を選ぶ．もしこれが中間値の定理を成り立たせなければ，上の議論によって $\mathfrak{L}$ をさらに拡大することができるので，その極大性に反する．したがって，$\mathfrak{L}$ は実閉順序体である． □

問題 1 上の定理を使って，次のことを示せ．言語 $\mathcal{L}_{\mathrm{OF}}$ の任意の開論理式 φ について，

$$\mathrm{RCOF} \vdash \varphi \Leftrightarrow \mathrm{OF} \vdash \varphi.$$

$\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{L}$ を2つの体とする．$\mathfrak{K}$ 上で代数的になる(つまり $\mathfrak{K}$ の多項式の解となる) $\mathfrak{L}$ の元を集めてできる $\mathfrak{L}$ の部分構造を $\bar{\mathfrak{K}}^{\mathfrak{L}}$ とすると，$\bar{\mathfrak{K}}^{\mathfrak{L}}$ も体になる．そして，$\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{M} \subseteq \bar{\mathfrak{K}}^{\mathfrak{L}}$ となる体 $\mathfrak{M}$ に対しては，$\bar{\mathfrak{M}}^{\mathfrak{L}} = \bar{\mathfrak{K}}^{\mathfrak{L}}$ となることもすぐわかる．

補題 7.2.4 (同型条件) $\mathfrak{K}_1 \cong \mathfrak{K}_2$ を2つの順序体とし，その間に同型 f: $\mathfrak{K}_1 \to \mathfrak{K}_2$ があるとする．各 $i = 1, 2$ について，$\mathfrak{K}_i \subseteq \mathfrak{L}_i$ となる実閉体 $\mathfrak{L}_i$ をとると，f は $\overline{\mathfrak{K}_1}^{\mathfrak{L}_1}$ と $\overline{\mathfrak{K}_2}^{\mathfrak{L}_2}$ の間の同型に一意に拡張される．

証明 $\overline{\mathfrak{K}_1}^{\mathfrak{L}_1} = \mathfrak{K}_1$ であれば，$\overline{\mathfrak{K}_2}^{\mathfrak{L}_1} = \mathfrak{K}_2$ もいえ，題意は自明である．いま，$\overline{\mathfrak{K}_1}^{\mathfrak{L}_1} \neq \mathfrak{K}_1$ として，$|\overline{\mathfrak{K}_1}^{\mathfrak{L}_1}| - |\mathfrak{K}_1|$ の元を根にもつ $\mathfrak{K}_1$ の多項式のなかで次数が最小になるものを選んで $P(x)$ とし，その根を u としておく．

$\mathfrak{K}_1(u)$ には $\mathfrak{L}_1$ の部分構造として順序が入るが，それは上の定理 7.2.3 の証明で構成した $\mathfrak{K}_1[x]/P(x)$ の埋め込みによるものと一致する．なぜなら，$\mathfrak{K}_1[x]/P(x)$ の元 $[Q(x)]_{\approx}$ の符号は，u の近傍での $Q(x)$ の符号で定義されているから，$Q(u)$ が存在するならその符号とも一致しなければならない．

さて，$P(x)$ の次数の最小性から，$P'(u) \neq 0$ である．特に，$P'(u) > 0$ としても一般性を失わない．したがって定理 7.2.2 から，$a < u < b$ となる $a, b \in |\mathfrak{K}_1|$ が存在して，区間 (a, b) において $P'(x) > 0$ となる．すると，Rolle の定理 7.1.5 (の対偶)により，$P(x)$ はこの区間で狭義に単調増加であり，根 u は $P(x)$ により一意に決まる．よって同型 $f : \mathfrak{K}_1 \to \mathfrak{K}_2$ により $P(x)$ が $R(x)$ に移されるとすると，$R(x)$ は $(f(a), f(b))$ において $\overline{\mathfrak{K}_2}^{\mathfrak{L}_1}$ の元 v を一意に定める．すると，順序体として以下の同型が成り立つ．

$$\mathfrak{K}_1(u) \cong \mathfrak{K}_1[x]/P(x) \cong \mathfrak{K}_2[x]/R(x) \cong \mathfrak{K}_2(v).$$

そこで，u に v を対応させて，f を $\mathfrak{K}_1(u)$ から $\mathfrak{K}_2(v)$ の同型に拡張することができる．

さて，$\mathfrak{K}_1 \subseteq \mathfrak{M}_1 \subseteq \overline{\mathfrak{K}_1}^{\mathfrak{L}_1}$ となる順序体 $\mathfrak{M}_1$ で，$\mathfrak{K}_2 \subseteq \mathfrak{M}_2 \subseteq \overline{\mathfrak{K}_2}^{\mathfrak{L}_2}$ となるある順序体 $\mathfrak{M}_2$ との間に f の拡張となる同型が存在するようなもの全体を考える．Zorn の補題によって，このクラスから極大な順序体 $\mathfrak{M}_1$ を選ぶ．もし $\mathfrak{M}_1 \subsetneq \overline{\mathfrak{M}_1}^{\mathfrak{L}_1} = \overline{\mathfrak{K}_1}^{\mathfrak{L}_1}$ であれば，上の議論によって $\mathfrak{M}_1$ を拡大できるので，極大性に反する．よって，$\mathfrak{M}_1 = \overline{\mathfrak{K}_1}^{\mathfrak{L}_1}$．このとき，$\mathfrak{M}_1$ と同型になる $\mathfrak{M}_2$ が $\overline{\mathfrak{K}_2}^{\mathfrak{L}_2}$ と一致していることも明らかである．最後に，$\overline{\mathfrak{K}_1}^{\mathfrak{L}_1}$ の各 u は $\mathfrak{K}$ の多項式 $P(x)$ の何番目の根であるかによって一意に定まるので，対応する $\overline{\mathfrak{K}_2}^{\mathfrak{L}_2}$ の元 v も一意に定まり，同型の拡張は一意的である．　□

上の定理と補題により，任意の順序体 $\mathfrak{K}$ に対し，その代数拡大となる実閉順序体が同型を除いて一意に決まることがわかる．そのような実閉順序体を $\mathfrak{K}$ の**実閉包**(real closure)と呼ぶ．

次章では，実閉順序体の量化記号消去を証明するが，そのために必要な補題をもう 1 つ証明しておく．

補題 7.2.5 (**1-モデル完全性**)　$\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{L}$ を 2 つの実閉順序体とする．言語 $\mathcal{L}_{\mathrm{OF}}$ における開論理式 $\varphi(\vec{x}, y)$ と $\mathfrak{K}$ の元 $\vec{a}$ が任意に与えられ $\mathfrak{L}_{\{\vec{a}\}} \models \exists y\, \varphi(\vec{a}, y)$ ならば，すでに $\mathfrak{K}_{\{\vec{a}\}} \models \exists y\, \varphi(\vec{a}, y)$ である．

証明　開論理式 $\varphi(\vec{x}, y)$ を選言標準形で表す(第5章の補題5.4.5を参照)．このとき，$u \neq v \leftrightarrow u < v \vee v < u$ および $u \not< v \leftrightarrow u = v \vee v < u$ を用いれば，$\varphi(\vec{x}, y)$ は否定を使わず，原子論理式の連言($\wedge$-結合)の選言($\vee$-結合)で表せる．よって，$\exists y\, \varphi(\vec{x}, y)$ は $\exists y\, (\alpha_1(\vec{x}, y) \wedge \cdots \wedge \alpha_k(\vec{x}, y))$ (α_i は原子論理式) の形の論理式の連言によって表せる．したがって，$\exists y\, (\alpha_1(\vec{a}, y) \wedge \cdots \wedge \alpha_k(\vec{a}, y))$ の論理式が $\mathfrak{Q}$ で成り立つと仮定して，$\mathfrak{R}$ で成り立つことをいえばよい．

さて，$\alpha_1(\vec{a}, y) \wedge \cdots \wedge \alpha_k(\vec{a}, y)$ は，y に関する等式と不等式でできていると考えられる．y を本質的に含まない式は量化記号 $\exists y$ の外に出して構わないので，各 $\alpha_i(\vec{a}, y)$ は $P(y) = 0$ もしくは $Q(y) > 0$ の形で表せるものとしてよい．もしそれが等式 $P(y) = 0$ を含んでいれば，$\mathfrak{Q}$ で $P(y) = 0$ を満たす y は代数的な元であるから，実閉体 $\mathfrak{R}$ にすでに入っていなければならない．そして，$\alpha_1(\vec{a}, y) \wedge \cdots \wedge \alpha_k(\vec{a}, y)$ が $\mathfrak{Q}$ で成り立っていれば，$\mathfrak{R}$ でも成り立つことは明らかである．

次に，$\alpha_1(\vec{a}, y) \wedge \cdots \wedge \alpha_k(\vec{a}, y)$ が，不等式 $Q_i(y) > 0$ だけで構成されているとする．すべての i $(1 \leq i \leq k)$ について $Q_i(y) = 0$ のすべての実解 y を集めて S とおくと，それは $\mathfrak{Q}$ で考えても $\mathfrak{R}$ で考えても同じ集合である．いま，$\mathfrak{Q}$ において $\exists y\, (Q_1(y) > 0 \wedge \cdots \wedge Q_k(y) > 0)$ だから，中間値定理によって，S における隣合う 2 点 a, b が存在して，(a, b) の任意の点 z について $Q_1(z) > 0 \wedge \cdots \wedge Q_k(z) > 0$ が成り立つか，あるいは S における最大もしくは最小の a について，$(a, +\infty)$ もしくは $(-\infty, a)$ の任意の点 z について $Q_1(z) > 0 \wedge \cdots \wedge Q_k(z) > 0$ が成り立つ．したがって，$z = (a + b)/2$ もしくは $z = a \pm 1$ は $\mathfrak{R}$ の元であって，$Q_1(z) > 0 \wedge \cdots \wedge Q_k(z) > 0$ を満たす．　□

7.3 実閉順序体の量化記号消去

本節では，実閉順序体の量化記号消去に関する Tarski の定理を証明する．Tarski の証明は，Hilbert の第 17 問題を解決した Artin と Schreier の方法を発展させたものであるが，より簡明でより多くの応用をもっている．Tarski に続いて，A. Robinson は量化記号消去より弱い概念であるモデル完全性を使っても様々な応用が可能であることを示し，さらに Shoenfield はモデル完全性にどんな条件を加えれば，量化記号消去が導けるかを示した．本節の議論の大枠は，Shoenfield [Sho] による．モデル論を使わない Tarski の定理の証明については，文献 [AdZ], [KrK] を参照．

定義 7.3.1 理論 T が**同型条件**(isomorphism condition)を満たすというのは，以下のことである．各 $i=1,2$ について，$\mathfrak{L}_i$ を T のモデルとし，$\mathfrak{K}_i \subseteq \mathfrak{L}_i$ として，同型 $f: \mathfrak{K}_1 \to \mathfrak{K}_2$ があるとする．このとき，$\mathfrak{K}_i \subseteq \mathfrak{M}_i \subseteq \mathfrak{L}_i$ となる T のモデル $\mathfrak{M}_i$ が存在して，f は $\mathfrak{M}_1$ と $\mathfrak{M}_2$ の間の同型に拡張される．

定義 7.3.2 言語 $\mathcal{L}$ の理論 T が，**1-モデル完全**(1-model complete)であるというのは，以下のことである．$\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{L}$ を T の 2 つのモデルとする．言語 $\mathcal{L}$ の開論理式 $\varphi(\vec{x}, y)$ と $\mathfrak{K}$ の元 $\vec{a}$ が任意に与えられ，$\mathfrak{L}_{\{\vec{a}\}} \models \exists y\, \varphi(\vec{a}, y)$ ならば，すでに $\mathfrak{K}_{\{\vec{a}\}} \models \exists y\, \varphi(\vec{a}, y)$ である．

前節で示したように，実閉順序体の理論 RCOF は，同型条件を満たす 1-モデル完全な理論である．

定理 7.3.3 (Shoenfield) 同型条件を満たす 1-モデル完全な理論は，量化記号を消去できる．

以下で 2 つの補題を証明してから，上の定理の証明に入る．この証明で重要な役割を果たすのが**開文**(open sentence)のクラスである．開論理式とは束縛変数をもたない論理式であり，文とは自由変数をもたない論理式である

から，開文は全く変数をもたない論理式である．開文クラスを扱うとき，変数を用いない代わりに，必要に応じて新しい定数を言語に付け足す操作を行う．このとき，次の補題は大切である．

補題 7.3.4 言語 $\mathcal{L}$ の理論 T が同型条件を満たすとき，新しい定数の集合 C を加えた言語 $\mathcal{L} \cup C$ においても T は同型条件を満たす．同様に，1-モデル完全な理論は，新しい定数の集合を加えて言語を拡大しても 1-モデル完全である．

証明 言語 $\mathcal{L}$ の理論 T が同型条件を満たすとする．そして，各 $i=1,2$ について，$\mathfrak{L}_i$ を $\mathcal{L} \cup C$ における T のモデルとし，$\mathfrak{K}_i \subseteq \mathfrak{L}_i$ として，$\mathcal{L} \cup C$ における同型 $f : \mathfrak{K}_1 \to \mathfrak{K}_2$ があるとする．このとき，$\mathfrak{K}_i, \mathfrak{L}_i$ の $\mathcal{L}$ への縮約をそれぞれ $\mathfrak{K}'_i, \mathfrak{L}'_i$ とすれば，f は $\mathcal{L}$ における同型 $f' : \mathfrak{K}'_1 \to \mathfrak{K}'_2$ を定めるので，言語 $\mathcal{L}$ の理論としての T の同型条件より，T のモデル $\mathfrak{M}'_i \subseteq \mathfrak{L}'_i$ が存在して，f' は $\mathfrak{M}'_1$ と $\mathfrak{M}'_2$ の間の同型に拡張される．もともと C の定数は $\mathfrak{K}_i$ の元に解釈されているので，その解釈を $\mathfrak{M}'_i$ に加えて $\mathfrak{M}_i$ とすれば，f' は自然に $\mathfrak{M}_1$ と $\mathfrak{M}_2$ の間の同型に拡張され，これが最初の $f : \mathfrak{K}_1 \to \mathfrak{K}_2$ の拡張になっていることは明らかである．

1-モデル完全性の保存についても，同様に証明できる． □

(定数を1つ以上含む言語における) 2つの構造 $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ がすべての開文について真偽を同じくするなら，それらは**開文同値** (equivalent with respect to the open sentences) であるといい，$\mathfrak{A} \equiv_0 \mathfrak{B}$ と書く．

補題 7.3.5 $\mathcal{L}$ を定数を1つ以上含む言語とし，T を $\mathcal{L}$ の理論とする．すると，$\mathcal{L}$ の任意の文 σ に対して，以下の2条件は同値になる．

(1) T の任意の2つのモデルで開文同値な $\mathfrak{A} \equiv_0 \mathfrak{B}$ に対し，$\mathfrak{A} \models \sigma \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \sigma$.

(2) $\mathcal{L}$ の開文 φ が存在して，$T \vdash \varphi \leftrightarrow \sigma$.

証明　(2) → (1) は明らかであるから，(1) → (2) を示す．まず，

$$\Gamma = \{\varphi : T \vdash \sigma \rightarrow \varphi,\ \varphi \text{は開文}\}$$

とおく．このとき，$T \cup \Gamma \vdash \sigma$ が示せれば，有限集合 $\{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\} \subseteq \Gamma$ が存在して，

$$T \vdash (\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \leftrightarrow \sigma$$

であるから，(2) がいえる．そこで，$T \cup \Gamma \nvdash \sigma$ を仮定して，矛盾を導く．

完全性定理により，$T \cup \Gamma \cup \{\neg \sigma\}$ はモデル $\mathfrak{A}$ をもつ．$\mathfrak{A}$ で真となる開文全体を Δ とおく．$T \cup \Delta$ の任意のモデル $\mathfrak{B}$ は，$\mathfrak{A}$ と開文同値になるから，(1) の仮定より，$\mathfrak{B} \models \neg \sigma$ である．再び完全性定理によって，$T \cup \Delta \vdash \neg \sigma$ を得る．すると，有限集合 $\{\psi_1, \cdots, \psi_n\} \subseteq \Delta$ が存在して，

$$T \vdash (\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n) \rightarrow \neg \sigma$$

であるから，

$$T \vdash \sigma \rightarrow (\neg \psi_1 \vee \cdots \vee \neg \psi_n)$$

となる．したがって，$(\neg \psi_1 \vee \cdots \vee \neg \psi_n) \in \Gamma \subseteq \Delta$ であるが，これは $\{\psi_1, \cdots, \psi_n\} \subseteq \Delta$ に反する．　□

定理 7.3.3 の証明　T を同型条件を満たす 1-モデル完全な理論とする．φ を開論理式として，$\sigma = \exists x\, \varphi$ の形の論理式に対して，同値な開論理式が存在することをいえばよい(補題 5.4.5 参照)．まず，$\exists x\, \varphi$ に含まれる自由変数をそれぞれ新しい定数で置き換え，(それらの定数を含めて)1 つ以上定数を含むように言語を拡張する．補題 7.3.4 により，こうしても同型条件や 1-モデル完全性は保たれる．

補題 7.3.5 により，T の任意の 2 つの開文同値モデル $\mathfrak{A} \equiv_0 \mathfrak{B}$ に対し，$\mathfrak{A} \models \sigma \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \sigma$ がいえればよい．$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ の元で(変数を含まない)項 t の解釈 $t^{\mathfrak{A}}, t^{\mathfrak{B}}$ になるものの全体をそれぞれ A', B' とすると，それらは自然に $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ の部分構造 $\mathfrak{A}', \mathfrak{B}'$ を定める．そして，同じ項 t が指す A' の元 $t^{\mathfrak{A}}$ と B' の元 $t^{\mathfrak{B}}$ を対応させれば，$\mathfrak{A}'$ と $\mathfrak{B}'$ の間に同型が定義できる．

さて，同型条件を用いれば，$\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}'' \subseteq \mathfrak{A}$ となる T のモデル $\mathfrak{A}''$，および $\mathfrak{B}' \subseteq \mathfrak{B}'' \subseteq \mathfrak{B}$ となる T のモデル $\mathfrak{B}''$ が存在して，f を $\mathfrak{A}''$ と $\mathfrak{B}''$ の間の同型に拡張することができる．T は1-モデル完全だから，$\sigma = \exists x \varphi$ に対し，

$$\mathfrak{A}'' \models \sigma \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \sigma, \quad \mathfrak{B}'' \models \sigma \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \sigma$$

がいえる．一方，$\mathfrak{A}'' \cong \mathfrak{B}''$ より，$\mathfrak{A}'' \models \sigma \Leftrightarrow \mathfrak{B}'' \models \sigma$ だから，

$$\mathfrak{A} \models \sigma \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \sigma$$

となって，証明が完成した． □

系 7.3.6 実閉順序体の理論 RCOF は，量化記号を消去できる．

系 7.3.7 RCOF はモデル完全，完全，決定可能である．

証明 すべての論理式が $\forall$ 論理式と同値になることがモデル完全のための必要十分条件であるから，量化記号消去ができればモデル完全になることは明らか．量化記号が消去できれば，すべての文は開文と同値になるが，RCOF の開文は明らかに真偽の判定のできるものだけなので，RCOF は完全で，補題 5.4.2 より決定可能である． □

系 7.3.8 RCF はモデル完全，完全，決定可能である．

証明 $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{L}$ を RCF の 2 つのモデルとする．

$$x < y \leftrightarrow \exists z\,(z^2 + x = y \wedge z \neq 0)$$

によって $<$ を導入すれば，$\mathfrak{K}, \mathfrak{L}$ は共に RCOF のモデル $\mathfrak{K}', \mathfrak{L}'$ になる．RCOF のモデル完全性より，$\mathfrak{K}'$ は $\mathfrak{L}'$ の初等的部分構造になり，それは $<$ を除いて考えても同じである．よって，RCF もモデル完全である．

RCF のどのモデルも有理数体 $\mathfrak{Q} = (\mathbb{Q}, +, -, \cdot, /, 0, 1)$ の実閉包と同型になる部分構造をもち，モデル完全性よりそれは初等的部分構造になっている．したがって，RCF のどのモデルも初等的同値であることがいえ，RCF は完全である．最後に，再帰的公理化可能な完全理論は決定可能であ

るから，RCF は決定可能である． □

注．RCF は，量化記号を消去できない．特に，$x < y$ の意味を表す開論理式は作れない．

付録1 Hilbert の第17問題

定義 7.3.9 $\mathfrak{K}$ を順序体として，有理関数 $f(\vec{x})$ が，$\mathfrak{K}$ 上で**正定値**(positive semidefinite)であるとは，任意の $\vec{a} \in K$ に対して，$f(\vec{a}) \geq 0$ となることをいう．

Artin は，Hilbert の第17問題に対して，次のような解を得た．

定理 7.3.10 (Artin) 実閉順序体 $\mathfrak{K}$ 上の正定値有理関数 $f(\vec{x})$ は，$\mathfrak{K}$ 上のいくつかの有理関数の2乗の和で表せる．

次の補題を証明なしに仮定する．(証明は，[Jac] などにある．)

補題 7.3.11 体 $\mathfrak{K}$ において，2乗の和で表せない元があれば，その元を負にするような順序によって $\mathfrak{K}$ を順序体にすることができる．

定理 7.3.10 の証明 対偶を示す．実閉体 $\mathfrak{K}$ の元を係数，$X_1, \cdots, X_n$ を不定元とする有理関数全体を $K(X_1, \cdots, X_n)$ とする．これは自然な演算により体 $\mathfrak{K}(X_1, \cdots, X_n)$ となる．いま，$f(X_1, \cdots, X_n) \in K(X_1, \cdots, X_n)$ が，有理関数の2乗の和で表せないなら，それを負にするような順序を $\mathfrak{K}(X_1, \cdots, X_n)$ に入れることができる．このとき，$f(X_1, \cdots, X_n)$ を K の元および $X_1, \cdots, X_n$ から構成される項と見れば，

$$\mathfrak{K}(X_1, \cdots, X_n) \models \exists x_1 \cdots \exists x_n f(x_1, \cdots, x_n) < 0$$

が成り立つ．$\mathfrak{L}$ を $\mathfrak{K}(X_1, \cdots, X_n)$ の実閉包とすれば，$\mathfrak{L}$ でも $f(X_1, \cdots, X_n)$ は正定値でない．ここで，$\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{L}$ であるから，実閉体のモデル完全性より，$\mathfrak{K}$ は $\mathfrak{L}$ の初等的部分構造である．よって，

$$\mathfrak{K} \models \exists x_1 \cdots \exists x_n f(x_1, \cdots, x_n) < 0$$

となり，$f(\vec{x})$ は $\mathfrak{K}$ 上で正定値でない． □

系 7.3.12 有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の正定値有理関数 $f(\vec{x})$ は，$\mathbb{Q}$ 上のいくつかの有理関数の2乗の和で表せる．

証明 $f(X_1, \cdots, X_n) \in \mathbb{Q}(X_1, \cdots, X_n)$ が，有理関数の2乗の和で表せないとすると，上と同様な議論で，適当な順序が入った $\mathbb{Q}(X_1, \cdots, X_n)$ の実閉包において $f(x_1, \cdots, x_n)$ は正定値でなく，したがって $\mathbb{Q}$ の実閉包 $\mathfrak{R}$ においても正定値でなくなる．すると，$f(x_1, \cdots, x_n)$ の連続性と $\mathbb{Q}$ の稠密性により，

$$\mathbb{Q} \models \exists x_1 \cdots \exists x_n f(x_1, \cdots, x_n) < 0$$

がいえる． □

いま，多項式 $P(x_1, \cdots, x_n)$ の次数を，それぞれの x_i に関する多項式と見ての次数の最大値とし，有理関数 $f(x_1, \cdots, x_n) = P(x_1, \cdots, x_n)/Q(x_1, \cdots, x_n)$ の**次数**を，多項式 P の次数と多項式 Q の次数の大きな方とする．すると，d 次多項式 $P(x_1, \cdots, x_n)$ は高々 $(d+1)^n$ 個の項をもち，それぞれの係数によって全体が決定されるので，d 次有理関数は $2(d+1)^n$ 個のパラメータによって決定される．

系 7.3.13 次を満たす再帰的関数 $\tau(n, d)$ がある．任意の実閉順序体 $\mathfrak{R}$ において，d 次の正定値有理関数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ は，$\tau(n, d)$ 個以下の $\tau(n, d)$ 次(以下の)有理関数の2乗の和で表せる．

証明 d 次の正定値有理関数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ を記述するパラメータを $a_1, a_2, \cdots, a_N$ $(N = 2(d+1)^n)$ とし，これらを新しい定数として，言語 $\mathcal{L}_{\mathrm{OF}} = (+, -, \cdot, /, 0, 1, <)$ に加えておく．いま，各自然数 m に対して，σ_m を「$f(x_1, \cdots, x_n)$ が m 個以下の m 次(以下の)有理関数の2乗の和で表せる」という意味の論理式とする．これは，$\mathcal{L}_{\mathrm{OF}} \cup \{a_1, a_2, \cdots, a_N\}$ における文であり，$\sigma_m \to \sigma_{m+1}$ が明らかに成り立っている．ここで，$T = \mathrm{RCOF} + \forall \vec{x} f(\vec{x}) \geq 0 + \{\neg \sigma_m : m \text{は自然数}\}$ とおく．もし T がモデルをもつと，定理の主張に反する実閉順序体が得られてしまうので，T はモデルをもたない．つまり矛盾する．したがって，ある m_0 が存在して，$\mathrm{RCOF} + \forall \vec{x} f(\vec{x}) \geq 0 + \{\neg \sigma_1, \cdots, \neg \sigma_{m_0}\}$ が矛盾しており，$\neg \sigma_{m+1} \to \neg \sigma_m$ から，$\mathrm{RCOF} + \forall \vec{x} f(\vec{x}) \geq 0 + \{\neg \sigma_{m_0}\}$ も矛盾していることになる．よって，

$$\mathrm{RCOF} \vdash \forall \vec{x} f(\vec{x}) \geq 0 \rightarrow \sigma_{m_0}$$

を得る．$a_1, a_2, \cdots, a_N$ は右辺にしか現れないので，これを変数に読み替えれば，右辺も $\mathcal{L}_{\mathrm{OF}}$ の論理式と見なせる．さて，RCOF は決定可能であるから，上式を満たす m_0 は再帰的に求まる．つまり，$\tau(n, d) = m_0$ となる再帰的関数がある． □

RCOF の証明可能性は原始再帰的に判定できることが知られているので，上の関数 $\tau(n, d)$ も原始再帰的にとれる．この上限を改良する研究が H. Friedman らによって行われている．

付録 2　複素数と零点定理

定義 7.3.14　代数的閉体(algebraically closed field)の理論 ACF は，体の言語 $\mathcal{L}_{\mathrm{AF}} = (+, -, \cdot, /, 0, 1)$ において，体の理論 AF に以下を加えたものとする．

$$\forall x_0 \forall x_1 \cdots \forall x_{n-1} \exists y \;\; x_0 + x_1 y + \cdots + x_{n-1} y^{n-1} + y^n = 0 \quad (n > 0).$$

ACF に，標数 0 を表す次の公理(すべての $n \geq 2$)を加えたものを ACF(0) とする．

$$\overbrace{1 + 1 + \cdots + 1}^{n\,\text{個}} \neq 0 \quad (n \geq 2).$$

ACF(0) の代表的なモデルは複素数体 $\mathfrak{C} = (\mathbb{C}, +, -, \cdot, /, 0, 1)$ である．下の補題 7.3.18 で示すように，ACF(0) の任意のモデルは，複素数体 $\mathfrak{C}$ と初等的同値になる．

補題 7.3.15　ACF は有限モデルをもたない．

証明　ACF の有限モデル $\mathfrak{A}$ が存在したとして，その領域を $|A| = \{a_1, \cdots, a_k\}$ とする．すると，$f(x) = (x - a_1) \cdots (x - a_k) + 1$ は，$\{a_1, \cdots, a_k\}$ の中に根をもち得ないので，矛盾である． □

我々は，任意の体 $\mathfrak{A}$ が代数的閉体に埋め込め，さらにその最小なものとして，代数的閉包 $\bar{\mathfrak{A}}$ がとれることを知っている(第 4 章の問題 8)．ここでは証明しないが，代数的閉包は同型を除いて一意に定まることがいえる．したがって，ACF も同型条件を満たす 1-モデル完全な理論であり，量化記号を消去できる．

定理 7.3.16 ACF は，量化記号を消去できる．

これから次がいえる．

系 7.3.17 ACF はモデル完全，決定可能である．

系 7.3.18 ACF(0) はモデル完全，完全，決定可能である．

この事実を応用して，次の定理を示そう．

定理 7.3.19 (**Hilbert の零点定理**(Nullstellensatz)) $\mathfrak{K}$ を代数的閉体とする．$\mathfrak{K}$ で共通根をもたない多項式の列 $P_1(X_1, \cdots, X_n)$, $\cdots$, $P_m(X_1, \cdots, X_n) \in K[X_1, \cdots, X_n]$ に対して，$Q_1(X_1, \cdots, X_n)$, $\cdots$, $Q_m(X_1, \cdots, X_n) \in K[X_1, \cdots, X_n]$ が存在して，

$$P_1(X_1, \cdots, X_n) Q_1(X_1, \cdots, X_n) + \cdots + P_m(X_1, \cdots, X_n) Q_m(X_1, \cdots, X_n) = 1.$$

証明 対偶を示す．$P_1(X_1, \cdots, X_n)$, $\cdots$, $P_m(X_1, \cdots, X_n) \in K[X_1, \cdots, X_n]$ に対して，結論が成り立たないとする．このとき，

$$I = \{ P_1(X_1, \cdots, X_n) Q_1(X_1, \cdots, X_n) + \cdots + P_m(X_1, \cdots, X_n) Q_m(X_1, \cdots, X_n) : \\ Q_1(X_1, \cdots, X_n), \cdots, Q_m(X_1, \cdots, X_n) \in K[X_1, \cdots, X_n] \}$$

とおく．すなわち，I は $P_1(X_1, \cdots, X_n)$, $\cdots$, $P_m(X_1, \cdots, X_n)$ で生成されるイデアルであって，1 を含まない $K[X_1, \cdots, X_n]$ の真部分集合である．Zorn の補題を用いて，I を極大イデアル J に拡大する．$P(X_1, \cdots, X_n) - Q(X_1, \cdots, X_n) \in J$ によって，$K[X_1, \cdots, X_n]$ 上に同値関係 $P(X_1, \cdots, X_n) \sim Q(X_1, \cdots, X_n)$ を定義し，剰余代数 $\mathfrak{K}[X_1, \cdots, X_n]/J$ を考えると，これが体になることは容易にわかる．つまり，$\mathfrak{K}[X_1, \cdots, X_n]/J$ は $\mathfrak{K}$ の拡大体と考えられる．

ここからが重要である．$\mathfrak{K}[X_1, \cdots, X_n]/J$ の上では，

$$P_1(X_1, \cdots, X_n) = 0, \quad \cdots, \quad P_m(X_1, \cdots, X_n) = 0$$

であるから，(Artin の定理の証明を参照)

$$\mathfrak{K}[X_1, \cdots, X_n]/J \models \exists x_1 \cdots \exists x_n (P_1(x_1, \cdots, x_n) = 0 \land \cdots \land P_m(x_1, \cdots, x_n) = 0)$$

がいえる．すると，$\mathfrak{K}[X_1, \cdots, X_n]/J$ の代数的閉包 Ω においても，上式がいえる．ここで，代数的閉体のモデル完全性より，$\mathfrak{K}$ は Ω の初等的部分構造であるから，

$$\mathfrak{K} \models \exists x_1 \cdots \exists x_n (P_1(x_1, \cdots, x_n) = 0 \land \cdots \land P_m(x_1, \cdots, x_n) = 0)$$

となり，$P_1(X_1, \cdots, X_n)$，$\cdots$，$P_m(X_1, \cdots, X_n)$ は $\mathfrak{K}$ で共通根をもつことが示された． □

問題 2 次を満たす再帰的関数 $\tau(m, n, d)$ があることを示せ．任意の代数的閉体 $\mathfrak{K}$ において，共通根をもたない d 次以下の多項式の列 $P_1(X_1, \cdots, X_n)$，$\cdots$，$P_m(X_1, \cdots, X_n) \in K[X_1, \cdots, X_n]$ に対して，$\tau(m, n, d)$次以下の多項式の列 $Q_1(X_1, \cdots, X_n)$，$\cdots$，$Q_m(X_1, \cdots, X_n) \in K[X_1, \cdots, X_n]$ が存在して，

$\mathfrak{K} \models P_1(X_1, \cdots, X_n)\, Q_1(X_1, \cdots, X_n) + \cdots + P_m(X_1, \cdots, X_n)\, Q_m(X_1, \cdots, X_n) = 1.$

上の問題において，変数の個数 n と次数 d を制限すれば，m をあまり大きくとっても意味がない(多項式の列が独立でなくなる)ので，$\tau(m, n, d)$ は m に依存しないように定めることができる．Brownawell (1987) は，$\tau(m, n, d) = \mu n d^{\mu} + \mu d$ (但し，$\mu = \min\{m, n\}$) とできることを示している．

8

実数論　解析編

解析学の基礎としての実数論の構築は，19 世紀後半の Weierstrass や Cantor の研究に始まり，1920 年代のいわゆる“Hilbert のプログラム”の中で厳密な公理化が完成する．Hilbert の体系は，自然数の集合だけを扱う弱い集合論(2 階算術 Z_2)であって，そこで実数や実数列を定義し，実数の完備性などが定理として得られるものである．

Hilbert のプログラムにおける最重要課題の一つは，Z_2 の無矛盾性を有限の立場で確立することだったが，Gödel の第二不完全性定理はこれが不可能であることを示した．しかし，1970 年代後半からの H. Friedman, S. Simpson, 筆者らの仕事により，無矛盾性に関しては有限の立場と同程度の明晰さをもつ Z_2 の部分体系 RCA_0 や WKL_0 でも広範な数学の基礎となる実数論が展開できることがわかってきた．本章では，その辺りの研究を概観しつつ，いままでどこにも公表されていなかった RCA_0 における代数学の基本定理について，詳しく扱うことにする．

8.1 2階算術と実数の定義

最初に，2階算術の言語 $\mathcal{L}^2_{\mathrm{OR}}$ を定義する．$\mathcal{L}^2_{\mathrm{OR}}$ は，順序環の言語 $\mathcal{L}_{\mathrm{OR}} = (+, \cdot, 0, 1, <)$ に2項関係 $\in$ を加えた2領域の述語論理の言語である．ここでは，自然数の領域 M と自然数の集合たちの領域 S を予め分けて形式化するが，領域を分けるための関係記号(例えば，$M(x), S(x)$)を言語に入れることで，1領域の述語論理にも直せる(第3章の章末の補足を参照)，2領域の言語における論理式などの定義は，1領域の言語からの類推で殆ど自明であるが，いくつか注意すべき点もあるので簡単に述べておく．

原則として，$a, b, c, \cdots, m, n, \cdots$ など小文字で自然数の上を動く変数，$X, Y, Z, \cdots$ など大文字で集合の上の変数を表す．しかし，厳密にそれらを大文字，小文字で分類すると，慣用に反する表記が生じて読みにくくなるので，その場合は慣用を優先する．例えば，関数は集合の一種だが，小文字 f で書くことが多い．数に関する変数と定数 $0, 1$ を，2項演算記号 $+, \cdot$ 及び括弧を適当に使って組み合わせたものを $\mathcal{L}^2_{\mathrm{OR}}$ の**項**(term)という．そして，t_1 と t_2 を項とするとき，$t_1 = t_2, t_1 < t_2$ あるいは $t_1 \in X$ の形の記号列を**原子論理式**(atomic formula)と呼ぶ．一般の**論理式**(formula)は，原子論理式から，$\neg, \vee$ などの命題結合記号と，算術量化記号 $\forall n, \exists n$ および集合量化記号 $\forall X, \exists X$ を使って組立てられる．

論理式はその形によって次のように分類される．

定義 8.1.1 原子論理式から命題演算記号と有界量化記号 $\forall n < t, \exists n < t$ だけを使って作られる論理式を**有界**(bounded)または Π^0_0 または Σ^0_0 と呼ぶ．ここで，$\forall n < t$ は $\forall n\,(n < t \to \cdots)$，$\exists n < t$ は $\exists n\,(n < t \wedge \cdots)$ の省略形で，t は n を含まない項とする．集合量化記号を含まない論理式を**算術的**(arithmetic)または Π^1_0 または Σ^1_0 という．φ が Σ^0_j 論理式のとき $\forall n_1 \cdots \forall n_k\, \varphi$ を Π^0_{j+1}，φ が Π^0_j 論理式のとき $\exists n_1 \cdots \exists n_k\, \varphi$ を Σ^0_{j+1} という．つま

り，Σ^0_j 論理式は ∃ で始まり，Π^0_j 論理式は ∀ で始まって，それぞれ ∃ 型の量化記号のブロックと ∀ 型の量化記号のブロックが交互に計 j 回続くものである．同様に，φ が Σ^1_j 論理式のとき $\forall X_1 \cdots \forall X_k\, \varphi$ を Π^1_{j+1}，φ が Π^1_j 論理式のとき $\exists X_1 \cdots \exists X_k\, \varphi$ を Σ^1_{j+1} 式という．

また，議論の前提となる基本体系の上で Σ^i_j(または Π^i_j)論理式と同値になる論理式を単に Σ^i_j(または Π^i_j)と呼ぶことがある．さらに，Π^i_j 論理式と同値になる Σ^i_j 論理式，あるいは Σ^i_j 論理式と同値になる Π^i_j 論理式のことを Δ^i_j 論理式とも呼ぶ．

本書で導入する2階算術の体系のうち，もっとも基本的なものは，これから定義する再帰的内包公理の体系である．

定義 8.1.2　再帰的内包公理の体系(the system of recursive comprehension axioms) RCA_0 は次の公理からなる．

（0）　述語論理の公理と推論規則．但し，自然数の間の等号についてのみ等号の公理を仮定する．（集合の間の等号 $X = Y$ は $\forall n\,(n \in X \leftrightarrow n \in Y)$ によって定義する．）

（i）　算術の基本公理： $\mathrm{Q}_<$．

（ii）　Δ^0_1-内包公理(Δ^0_1-CA)：

$$\forall n\,(\varphi(n) \leftrightarrow \psi(n)) \leftrightarrow \exists X\, \forall n\,(n \in X \leftrightarrow \varphi(n)).$$

但し，$\varphi(n)$ は Σ^0_1 式，$\psi(n)$ は Π^0_1 式で，X を自由変数として含まないものとする．この公理は集合 $X = \{n : \varphi(n)\}$ の存在を保証するものである．

（iii）　Σ^0_1-帰納法： 任意の Σ^0_1 式 $\varphi(n)$ について，

$$\varphi(0) \wedge \forall n\,(\varphi(n) \to \varphi(n+1)) \to \forall n\, \varphi(n).$$

Δ^0_1-内包公理は，標準的な解釈のもとでは(すなわち無限大元を含まないモデルの上では)再帰的集合の存在を主張していることになる(系5.2.8)ので，再帰的内包公理とも呼ばれる．もう少し正確にいうと，Δ^0_1-内包公理におけ

る $\psi(n)$ や $\varphi(n)$ は X 以外の集合パラメータを含むことができるので，この公理が要請することは，すでに存在する集合をオラクルに用いて計算できる集合が存在することであり，再帰的でない集合が存在しないという要請はしていないことに注意されたい．

補題 8.1.3　RCA_0 は1階算術 $\mathrm{I}\Sigma_1$ の保存的拡大である．つまり，$\mathrm{I}\Sigma_1$ の定理は RCA_0 で証明でき，RCA_0 で証明できる $\mathcal{L}_{\mathrm{OR}}$ の文は $\mathrm{I}\Sigma_1$ の定理になる．

証明　まず，Σ_n 論理式は，集合変数を含まない Σ^0_n 論理式であることに注意しておく．$\mathrm{I}\Sigma_1$ の公理はすべて RCA_0 に含まれているので，$\mathrm{I}\Sigma_1$ の定理が RCA_0 でも証明できることは明らか．逆を示すために，σ を $\mathcal{L}_{\mathrm{OR}}$ の文で，$\mathrm{I}\Sigma_1 \nvdash \sigma$ とする．完全性定理により，$\mathrm{I}\Sigma_1$ のモデル $\mathfrak{M} = (M, +, \cdot, 0, 1, <)$ で，$\mathfrak{M} \models \neg\sigma$ が存在する．

いま，$\varphi(x, y_1, \cdots, y_k)$ を Σ_1 論理式，$\psi(x, y_1, \cdots, y_k)$ を Π_1 論理式とする．$b_1, \cdots, b_k \in M$ に対して，$\mathfrak{M}_M \models \forall x\,(\varphi(x, b_1, \cdots, b_k) \leftrightarrow \psi(x, b_1, \cdots, b_k))$ であれば，

$$A_{\varphi,\psi,b_1,\cdots,b_k} = \{a \in M : \mathfrak{M}_M \models \varphi(a, b_1, \cdots, b_k)\}$$

とおき，そうでないとき，

$$A_{\varphi,\psi,b_1,\cdots,b_k} = \emptyset$$

とおく．そして，

$$S = \{A_{\varphi,\psi,b_1,\cdots,b_k} : \varphi \in \Sigma_1, \psi \in \Pi_1, \text{かつ } b_1, \cdots, b_k \in M\}$$

とおく．すると，以下に示すように，$(\mathfrak{M}, S) = (M \cup S, +, \cdot, 0, 1, <, \in)$ は RCA_0 のモデルになり，かつ σ は集合変数を含まないから S とは無関係に真偽が決まるので $(\mathfrak{M}, S) \models \neg\sigma$．よって，$\mathrm{RCA}_0 + \neg\sigma$ は無矛盾，すなわち $\mathrm{RCA}_0 \nvdash \sigma$ である．

さて，$\theta(x, y_1, \cdots, y_k, Y_1, \cdots, Y_l)$ を任意の Σ^0_n 論理式とする．いま，$b_1, \cdots, b_k \in M$，$A_{\varphi_1,\psi_1,\bar{c}}, \cdots, A_{\varphi_l,\psi_l,\bar{c}} \in S$ として，$\theta(x, b_1, \cdots, b_k, A_{\varphi_1,\psi_1,\bar{c}}, \cdots, A_{\varphi_l,\psi_l,\bar{c}})$ に含まれる部分論理式 $t \in A_{\varphi_i,\psi_i,\bar{c}}$ を $\varphi_i(t, \bar{c})$ または $\psi_i(t, \bar{c})$ で置

き換えれば，Σ^0_n 論理式 $\theta'(x, b_1, \cdots, b_k, \bar{c})$ が得られる．このとき，

$$\theta(x, b_1, \cdots, b_k, A_{\varphi_1,\psi_1,\bar{c}}, \cdots, A_{\varphi_l,\psi_l,\bar{c}}) \leftrightarrow \theta'(x, b_1, \cdots, b_k, \bar{c})$$

が $(\mathfrak{M}, S)$ 上で成り立つ．同様に，θ が Π^0_n 論理式のときには，集合パラメータなしで同値な Π^0_n 論理式 θ' が得られる．よって，S の元をパラメータに含んで Δ^0_1 定義可能な集合は，Δ_1 定義可能であり，S に属する．同じ理由で，S の元をパラメータに含んだ Σ^0_1-帰納法は，Σ_1-帰納法から導ける．よって，$(\mathfrak{M}, S)$ は RCA_0 のモデルになる． □

上の補題によって，第5章で示した $\mathrm{I}\Sigma_1$ の様々な性質が，RCA_0 でも成り立つことがわかる．特に，次の事実は以後頻繁に用いることになる．

補題 8.1.4 RCA_0 において，以下のことが成り立つ．

（1） Π^0_1-帰納法．

（2） Σ^0_1 論理式のクラスは，有界量化記号に関して閉じている．

X, Y を自然数からなる集合とする．$X \subseteq Y$ は $\forall n\,(n \in X \to n \in Y)$ の略記とし，$X = Y$ は $X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X$ とする．項の等式 $t_1 = t_2$ は Π^0_0 式だが，集合の等式 $X = Y$ は Π^0_1 式である．自然数の**ペア** (m, n) を自然数 $\dfrac{(m+n)(m+n+1)}{2} + m$ でコードする．**直積** $X \times Y$ は，X の元と Y の元からなるペア(のコード)全部の集合である．すなわち，

$$n \in X \times Y \leftrightarrow \exists x \leq n \exists y \leq n\,(x \in X \wedge y \in Y \wedge (x, y) = n)$$

と書け，右辺は Σ^0_0 式だから，$X \times Y$ の存在は RCA_0 で保証される．

関数 $f : X \to Y$ は，集合 $F \subseteq X \times Y$ で，$\forall x\,\forall y_0\,\forall y_1\,((x, y_0) \in F \wedge (x, y_1) \in F \to y_0 = y_1)$ かつ $\forall x \in X\,\exists y \in Y\,(x, y) \in F$ を満たすものをいう．そして，$(x, y) \in F$ のとき，$f(x) = y$ と書く．定義域が自然数全体になる関数を**全域関数**(total function)という．また，$X = \{i : i < n\}$ を定義域とする関数 f を**長さ** n の**有限列**という．RCA_0 において，有限列は自然数でコードすることができ，そのコード(ゲーデル数)と同一視する．

補題 8.1.5 RCA_0 において存在する全域関数全体は原始再帰法によって閉じている.

証明 第5章の補題5.2.6より, 原始再帰法によって定義される関数は $I\Sigma_1$ において Δ_1 定義可能であるから, Δ^0_1-内包公理により, それは集合として存在する. □

これから, RCA_0 において実数論がいかに展開されるかを見ていく. まず, 自然数全体の集合を $\mathbb{N} = \{n : n = n\}$ とおく. $\mathbb{N}$ 上での演算 $+, \cdot$ 等は, RCA_0 の相応する演算等をそのまま用いる. この定義は体系内の形式的定義であるから, 考えるモデルによって解釈が変わる(それぞれのモデルの自然数部分と一致する). 以下で定義する $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ などもすべて形式体系内のものであり, 標準数の集合とは区別しなければならない. 標準自然数全体を表す集合には今後 ω を用いる. それ以外の標準数(標準実数など)は本章では使わない.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 上の同値関係 $=_Z$ を $(k, l) =_Z (m, n) \leftrightarrow k + n = l + m$ によって定義する. そして, $=_Z$ の各同値類から最小のコードをもつペアを代表元に選んで, それを**整数**と呼び, その全体を $\mathbb{Z}$ とおく. ここで, (k, l) は整数 $k - l$ をコードしている. また, $\mathbb{Z}$ 上の演算は, $(k, l) + (m, n) =_Z (k + m, l + n)$, $(k, l) \cdot (m, n) =_Z (km + ln, kn + lm)$ 等で定める. すると, $\mathbb{Z}$ は整数環としての基本性質を満たすことが確かめられる.

次に, $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{(0, 0)\})$ 上の同値関係 $=_Q$ を $(k, l) =_Q (m, n) \leftrightarrow kn = lm$ によって定義する. そして, $=_Q$ の各同値類からコードの最小なものを代表元に選んで, それを**有理数**と呼び, その全体を $\mathbb{Q}$ とおく. ここで, (k, l) は有理数 $\dfrac{k}{l}$ をコードしている. $\mathbb{Q}$ 上の演算を, $(k, l) + (m, n) =_Q (kn + lm, ln)$, $(k, l) \cdot (m, n) =_Q (km, ln)$ 等で定める. すると, $\mathbb{Q}$ は有理数体として基本性質を満たす.

有理数列 $\{q_n\}$ が $\forall n \, \forall i \, (|q_n - q_{n+i}| \leq 2^{-n})$ を満たすとき, それを**実数**

と呼び，$\{q_n\} \in \mathbb{R}$ と書く．$\mathbb{Q}$ は2階算術における集合であるが，$\mathbb{R}$ は集合に関する述語であって2階算術の意味では集合にならないことに注意する．

実数上の等号，不等号をそれぞれ次のように定義する：

$$\{p_n\} = \{q_n\} \Leftrightarrow \forall n\,(|p_n - q_n| \le 2^{-n+1}),$$
$$\{p_n\} < \{q_n\} \Leftrightarrow \exists n\,(q_n - p_n > 2^{-n+1}).$$

すると，2つの実数 $\{p_n\}, \{q_n\}$ について，$\{p_n\} = \{q_n\}$ か $\{p_n\} < \{q_n\}$ か $\{q_n\} < \{p_n\}$ のいずれか1つが成立する．実際，$\{p_n\} < \{q_n\}$ でも $\{q_n\} < \{p_n\}$ でもなければ，$\forall n\,(q_n - p_n \le 2^{-n+1})$ かつ $\forall n\,(p_n - q_n \le 2^{-n+1})$ となるから，$\forall n\,(|p_n - q_n| \le 2^{-n+1})$，つまり $\{p_n\} = \{q_n\}$ である．

また，2つの実数 $\{p_n\}$ と $\{q_n\}$ の和は次のように定義する：

$$\{p_n\} + \{q_n\} = \{p_{n+1} + q_{n+1}\}.$$

このとき，

$$\begin{aligned}|(p_{n+1} + q_{n+1}) - (p_{n+1+i} + q_{n+1+i})| &\le |p_{n+1} - p_{n+1+i}| + |q_{n+1} - q_{n+1+i}| \\ &\le 2^{-n-1} + 2^{-n-1} \le 2^{-n}\end{aligned}$$

となるから，$\{p_{n+1} + q_{n+1}\}$ は実数である．2つの実数 $\{p_n\}$ と $\{q_n\}$ の積は，m を $\max(|p_0|, |q_0|) + 1 \le 2^{m-1}$ となる最小の自然数として

$$\{p_n\}\cdot\{q_n\} = \{p_{n+m}\cdot q_{n+m}\}$$

のように定義する．このとき，

$$\begin{aligned}&|p_{n+m}\cdot q_{n+m} - p_{n+m+i}\cdot q_{n+m+i}| \\ &\qquad \le |q_{n+m}|\cdot|p_{n+m} - p_{n+m+i}| + |p_{n+m+i}|\cdot|q_{n+m} - q_{n+m+i}| \\ &\qquad \le (|q_0| + 1)\cdot 2^{-n-m} + (|p_0| + 1)\cdot 2^{-n-m} \\ &\qquad \le 2\cdot(\max(|p_0|, |q_0|) + 1)\cdot 2^{-n-m} \\ &\qquad \le 2\cdot 2^{m-1}\cdot 2^{-n-m} \\ &\qquad = 2^{-n}\end{aligned}$$

となり，$\{p_n\}\cdot\{q_n\}$ も実数である．

以上の定義のもとで，$(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <, =)$ が**アルキメデス順序体**になることが RCA_0 で容易に証明される．ここで1つ注意しておくと，普通の数

学では上の $\mathbb{R}$ を同値関係 $=$ で割って実数体を定義するが，$\mathbb{R}$ の各元は集合であるから同値類をとるような操作はここではできず，われわれは同値関係をそのまま等号と見なす．

次に，**実数列**を以下の条件を満たす関数 $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$ として定義する：$f_n:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$ を $f_n(m)=f(n,m)$ で定めれば，各 f_n は実数である．この実数列を $\{f_n\}$ のようにも表す．また，実数列 $\{f_n\}$ の極限 $\lim_{n\to\infty} f_n$ を，$\forall\varepsilon>0\ \exists n\ \forall i\ (|a-f_{n+i}|<\varepsilon)$ となる実数 a と定める．この定義のもとで，次の区間縮小法の原理が RCA_0 において証明できる．

定理 8.1.6（**区間縮小法の原理**）　2つの実数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ が以下の条件を満たすとする：

$$\text{任意の } n \text{ について，} a_n\le a_{n+1}\le b_{n+1}\le b_n\text{，かつ } \lim_{n\to\infty}|a_n-b_n|=0.$$

このとき，$c=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n$ となる実数 c が存在することが RCA_0 で証明できる．

証明　まず，$a_n=\{p_{nm}\}, b_n=\{q_{nm}\}$ とする．いま，$p'_{nm}=p_{n(m+1)}-2^{-m-1}$, $q'_{nm}=q_{n(m+1)}+2^{-m-1}$ とおけば，やはり $a_n=\{p'_{nm}\}$, $b_n=\{q'_{nm}\}$ であって，任意の m に対して $p'_{nm}\le a_n$ かつ $b_n\le q'_{nm}$ となっている．

さて，$\lim_{n\to\infty}|a_n-b_n|=0$ だから，$\forall\varepsilon>0\ \exists n\ \forall m\ge n\ |a_m-b_m|<\varepsilon$．簡単な計算により $\forall\varepsilon>0\ \exists n\ \forall m\ge n\ |p'_{mm}-q'_{mm}|<\varepsilon$ もいえる．そこで，p''_k を次のように再帰的に定義する：$|p'_{nn}-q'_{nn}|<2^{-k}$ かつ $p''_{k-1}\le p'_{nn}$ となる最小の n を選び，$p''_k=p'_{nn}$ とおく．すると，$p''_k=p'_{nn}\le p''_{k+i}\le q'_{nn}$ だから，$\{p''_k\}$ が実数になることは明らか．また，$\forall\varepsilon>0\ \exists n\ \forall m\ge n\ |a_m-p''_m|<\varepsilon$ や $\forall\varepsilon>0\ \exists n\ \forall m\ge n\ |b_m-p''_m|<\varepsilon$ も容易にいえ，$\{p''_k\}=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n$ が成立する．　□

RCA_0 において，区間縮小法の原理は証明できても，$\mathbb{R}$ の点列コンパクト性は証明できないことが知られている．その事実については後の節で述べる

ことにして，ここでは上の定理の応用を見てみよう．$\mathbb{R}$ が非可算であることを証明する．

定理 8.1.7（**$\mathbb{R}$ の非可算性**）　任意の実数列 $\{a_n\}$ に対し，$\forall n\ (a_n \neq c)$ となる実数 c が存在することが RCA_0 で証明できる．

証明　まず，$a_n = \{p_{nm}\}$ とおく．原始再帰法を用いて，有理端点をもつ縮小閉区間列 $\{[q_n, r_n]\}$ を次のように定義する．

$$[q_0, r_0] = [0, 1],$$

$$[q_{n+1}, r_{n+1}] = \begin{cases} \left[\dfrac{q_n + 3r_n}{4}, r_n\right] & \left(p_{n,2n+3} \leq \dfrac{q_n + r_n}{2} \text{ のとき}\right), \\ \left[q_n, \dfrac{3q_n + r_n}{4}\right] & (\text{そうでないとき}). \end{cases}$$

2つの数列 $\{q_n\}, \{r_n\}$ は明らかに定理 8.1.6 の条件を満たしており，$c = \lim_{n\to\infty} q_n = \lim_{n\to\infty} r_n$ となる実数 c が存在する．いま，n を任意に固定する．もし $p_{n,2n+3} \leq \dfrac{q_n+r_n}{2}$ ならば，$a_n \leq p_{n,2n+3} + 2^{-2n-3} \leq \dfrac{q_n + r_n}{2} + 2^{-2n-3} < \dfrac{q_n + r_n}{2} + \dfrac{2^{-2n}}{4} = \dfrac{q_n + r_n}{2} + \dfrac{r_n - q_n}{4} = q_{n+1} \leq c$．そうでないときは，$a_n \geq \dfrac{q_n + r_n}{2} - 2^{-2n-3} > r_{n+1} \geq c$．いずれにしても，$a_n \neq c$ が示された．　□

次に，$\mathbb{R}$ 上の連続関数を導入しよう．

定義 8.1.8　次の条件を満たす集合 $\Phi \subseteq \mathbb{Q}^4$ を**連続関数** $f : \mathrm{dom}\, f (\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ のコードと呼ぶ．

（0）　$(p, q, r, s) \in \Phi \to p < q \wedge r \leq s$,

（1）　$(p, q, r, s), (p, q, r', s') \in \Phi \to r' \leq s$,

（2）　$((p, q, r, s) \in \Phi \wedge r' \leq r \leq s \leq s') \to (p, q, r', s') \in \Phi$,

（3）　$((p, q, r, s) \in \Phi \wedge p \leq p' < q' \leq q) \to (p', q', r, s) \in \Phi$.

直観的には，$(p, q, r, s) \in \Phi$ は $\forall x\,(p < x < q \to r \leq f(x) \leq s)$ を意味する．実数 x がコード Φ の連続関数 f の**定義域**に属することを，

$$x \in \mathrm{dom} f \leftrightarrow \forall n \, \exists (p, q, r, s) \in \Phi \, (p < x < q \wedge s - r < 2^{-n})$$

によって定義する．このとき，$x \in \mathrm{dom} f$ ならば，$\forall (p, q, r, s) \in \Phi\,(p < x < q \to r \leq y \leq s)$ となる実数 y がただ1つ存在することが RCA_0 で示せる．(練習問題： 区間縮小法の原理を使ってこれを示せ.) その y を $f(x)$ と書く．

RCA_0 で証明可能な連続関数の性質に，次の定理がある．

定理 8.1.9 (中間値の定理) 定義域 $\mathrm{dom} f$ が閉区間 $[0, 1]$ を含むような連続関数 f が与えられて，$f(0) < 0 < f(1)$ が成立しているとする．このとき，$f(x) = 0$ となる $x \in [0, 1]$ が存在することが RCA_0 で証明できる．

証明 まず，すべての有理数 $q \in [0, 1]$ に対して $f(q) \neq 0$ と仮定してよい．そうでなければ，定理はすでに成立している．任意の有理数 $q \in [0, 1]$ について，$f(q)$ を表す有理数列を $\{p_n\}$ とすると，十分大きな n に対し $p_n < -2^{-n}$ か $2^{-n} < p_n$ の一方が成立するから，それによって $f(q) < 0$ か $f(q) > 0$ かが判定できる．したがって，有理端点をもつ縮小閉区間列 $\{[p_n, q_n]\}$ を以下のように再帰的に定義することができる．

$$[p_0, q_0] = [0, 1],$$

$$[p_{n+1}, q_{n+1}] = \begin{cases} \left[\dfrac{p_n + q_n}{2}, q_n\right] & \left(f\left(\dfrac{p_n + q_n}{2}\right) < 0 \text{ のとき}\right), \\ \left[p_n, \dfrac{p_n + q_n}{2}\right] & \left(f\left(\dfrac{p_n + q_n}{2}\right) > 0 \text{ のとき}\right). \end{cases}$$

このとき，$x = \lim_{n \to \infty} p_n = \lim_{n \to \infty} q_n$ となる実数 $x \in [0, 1]$ が存在し，$f(x) = 0$ となることは明らか． □

中間値の定理から得られる結論の1つは，$\mathbb{R}$ が実閉順序体になることである．しかし，実閉順序体の理論 RCOF の定理がすべて $\mathbb{R}$ において成り立

つことはこの事実から直接導けない．そもそも $\mathbb{R}$ は2階算術の述語として定義されているので，その上の真偽の記述には3階の言語を必要とする．しかし，抜け道として Tarski の量化記号消去法を用いる手段があり，かなり精密なメタ数学的議論によって，RCOF の定理はすべて $\mathbb{R}$ において真となることが RCA_0 で証明される(Simpson-Tanaka-Yamazaki-Sakamoto の定理)．次の節で，RCA_0 において代数学の基本定理が成り立つことを証明するが，これによっても問題の難しさの一端を理解していただけるだろう．

8.2 代数学の基本定理

2階算術の体系 RCA_0 において，複素係数の多項式が1次式の積に分解できるという代数学の基本定理を証明する．これによって実係数の多項式は1次式と2次式の積に分解できるようになる(前章の補題 7.1.1 を参照)ので，1つの実多項式の実根を並べ上げたり，複数の実多項式の共通因子を求めたりができるようになる．

本節の議論はすべて RCA_0 の上で行われるので，特にそのことは明記しない．本節である命題が成り立つということは，それが RCA_0 で証明可能という意味である．また，虚数単位 i を含め，この節だけで用いる記号が多数あり，記号の使い方が前後の節と一貫していないこともご容赦願いたい．

前節では中間値の定理が RCA_0 で成立することを証明したが，複素多項式についても1つの根を求めるだけなら，本節の話よりもう少し簡単である．素朴な立場においては，1つの根を求める方法があれば，その方法を繰り返すことですべての根を得ることができる．しかし，RCA_0 の帰納法は繰り返して根を求めるには不十分であり，我々はすべての根を平行して求めねばならない．

最初に，複素数の定義を与える．まず，有理数の対の集合を $\mathbb{E} = \mathbb{Q} \times$

$\mathbb{Q}$ とおく．そして，$\mathbb{E}$ の元の列 $\alpha = \{(a_k, b_k) : k \in \mathbb{N}\}$ で，有理数列 $\{a_k : k \in \mathbb{N}\}, \{b_k : k \in \mathbb{N}\}$ が共に実数となるものを**複素数**と呼び，$\alpha \in \mathbb{C}$ と書く．また，実数 $a = \{a_k\}, b = \{b_k\}$ をそれぞれ α の**実部**，**虚部**と呼び，$\alpha = a + ib$ とも書くことにする．

複素数の四則演算は，実数の四則演算に基づいて普通に定義される．例えば，$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$，$(a + ib)\cdot(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$．そして，$(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1, =)$ は，標数 0 の体になる．また，$\alpha = a + ib$ の絶対値を $|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}$ などと定めることも普通の通りである．

定義 8.2.1　複素数の有限列 $P = \langle a_k : k \leq N \rangle$ で，$N = 0$ または $a_N \neq 0$ となるものを N 次の(複素)**多項式**と呼ぶ．P の次数 N を $\deg P$ で表す．多項式 $P = \langle a_k : k \leq N \rangle$ は，関数 $P(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k z^k = a_0 + a_1 z + \cdots + a_N z^N$ を意味しており，多項式とそれが表す関数は多くの場合同一に扱う．また，多項式全体を $\mathbb{C}[z]$ で表し，その上の足し算，掛け算は自然に定義されるものとする．$P \in \mathbb{C}[z]$ のノルムを $\|P\| = \max\{|a_0|, \cdots, |a_N|\}$ で定める．また，多項式のペア (P, Q) によって，**有理式** $P(z)/Q(z)$ を表し，有理式全体を $\mathbb{C}(z)$ と記す．$\mathbb{C}(z)$ 上の四則演算も通常のものとする．

$\mathbb{C}[z]$ や $\mathbb{C}(z)$ がそれぞれ可換環や体の代数構造を形成することは明らかである．さらに，これらの上には，次のような微分演算が定義できる．

定義 8.2.2　多項式 $P = \langle a_k : k \leq N \rangle$ の**微分**を $P' = \langle (k+1) a_{k+1} : k \leq N - 1 \rangle$ とする．有理式 P/Q の微分を $(P'Q - PQ')/Q^2$ とする．

次に，リーマン積分の有限近似を定義する．まず，$C(z_0, a)$ で，4 点 $z_0 \pm a \pm ia$ を頂点とする正方形の周を表す．つまり，z_0 を中心とし，一辺の長さが $2a$ で，各辺が実軸，虚軸に平行な正方形である．

定義 8.2.3　任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し，有理式 $f(z)$ の $C(z_0, a)$ の周に沿った **2^n 分割リーマン和**を次のように定義する．まず $h = 2a/2^n$ とおき，

$$S_n(f\,;\,z_0, a) =$$
$$h\sum_{k=1}^{2^n}\Bigg[\Bigg\{f\Bigg(z_0 - a - ia + \Bigg(k - \frac{1}{2}\Bigg)h\Bigg) - f\Bigg(z_0 + a + ia - \Bigg(k - \frac{1}{2}\Bigg)h\Bigg)\Bigg\}$$
$$+ i\Bigg\{f\Bigg(z_0 + a - ia + i\Bigg(k - \frac{1}{2}\Bigg)h\Bigg) - f\Bigg(z_0 - a + ia - i\Bigg(k - \frac{1}{2}\Bigg)h\Bigg)\Bigg\}\Bigg].$$

上の定義において，$f(z)$ が $C(z_0, a)$ の周および内部で常に有限の値をもつことは要請しない．但し，$S_n(f\,;\,z_0, a)$ の定義式の中で用いられる $f(z)$ の値が１つでも未定義であれば，$S_n(f\,;\,z_0, a)$ も未定義とする．

次の２つの補題は，リーマン和の定義から直ちに得られる．

補題 8.2.4　次の等式が成り立つ．（但し，各リーマン和は有限の値をもつものとする．）

$$S_n(c\,;\,z_0, a) = 0 \qquad (c \text{ は定数}),$$
$$S_n(z\,;\,z_0, a) = 0,$$
$$S_n(cf\,;\,z_0, a) = cS_n(f\,;\,z_0, a) \qquad (c \text{ は定数}),$$
$$S_n(f + g\,;\,z_0, a) = S_n(f\,;\,z_0, a) + S_n(g\,;\,z_0, a).$$

補題 8.2.5　ある正数 M に対し，$C(z_0, a)$ の任意の点 α（厳密には，$S_n(f\,;\,z_0, a)$の計算に用いる各分点 α）で $|f(\alpha)| \leq M$ となるならば，

$$|S_n(f\,;\,z_0, a)| \leq 8aM.$$

さらに次の２つの補題も複素関数のリーマン和の基本的な性質である．

補題 8.2.6　有理式 $f(z)$ について，下式の両辺が有限の値をもつならば，

$$S_n(f\,;\,z_0, a) = \sum_{k,l=1}^{2^n} S_0\Bigg(f\,;\,z_{kl}, \frac{a}{2^n}\Bigg)$$

が成立する．但し，$z_{kl} = z_0 - a - ia + \Bigg(\Bigg(k - \dfrac{1}{2}\Bigg) + i\Bigg(l - \dfrac{1}{2}\Bigg)\Bigg)\dfrac{2a}{2^n}$ である．

証明　$C(z_{kl}, a/2^n)$ は，正方形 $C(z_0, a)$ の内部を $2^n \times 2^n$ 個に等分割してできる小正方形の1つである．そして，$S_0\left(f\,;\, z_{kl}, \dfrac{a}{2^n}\right)$ は，小正方形 $C(z_{kl}, a/2^n)$ の各辺の中点 α における $f(\alpha)$ の値に $\pm 1, \pm i$ を掛けて足し合わせたものである．隣接する2つの小正方形においては，共有する辺の中点 α に対する $f(\alpha)$ の値に異符号を付けることになるので，$S_0\left(f\,;\, z_{kl}, \dfrac{a}{2^n}\right)$ の総和を考えると，正方形 $C(z_0, a)$ の内点に関する値はすべて相殺されて，周上の点の値の和になり，それは $S_n(f\,;\, z_0, a)$ に他ならない．□

補題 8.2.7
$$S_n(1/z\,;\,0, a) = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{8 \cdot 2^n \cdot i}{(2^n)^2 + (2^n + 1 - 2k)^2}$$

証明　定義から，次式はすぐに導ける．

$$\begin{aligned} S_n(1/z\,;\,0, a) &= \frac{2a}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} \left(\frac{4}{-a - ia + \left(k - \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{2a}{2^n}} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{2^n} \frac{8 \cdot 2^n \cdot i}{(2^n)^2 + (2^n + 1 - 2k)^2} \\ &\quad - \sum_{k=1}^{2^n} \frac{8(2^n + 1 - 2k)}{(2^n)^2 + (2^n + 1 - 2k)^2}. \end{aligned}$$

右辺の2番目の和 $\sum_{k=1}^{2^n} 8(2^n + 1 - 2k)/\{(2^n)^2 + (2^n + 1 - 2k)^2\}$ における k 番目と $2^n - k + 1$ 番目の数の和を考えれば，

$$\frac{8(2^n + 1 - 2k)}{(2^n)^2 + (2^n + 1 - 2k)^2} + \frac{8(2^n + 1 - 2(2^n - k + 1))}{(2^n)^2 + (2^n + 1 - 2(2^n - k + 1))^2} = 0$$

だから，2番目の和は0となって与式を得る．□

ここで，$\pi_n = \sum_{k=1}^{2^n} 4 \cdot 2^n/\{(2^n)^2 + (2^n + 1 - 2k)^2\}$ とおけば，π_n は π の近似値であり，$S_n(1/z\,;\,0, a) = 2\pi_n i$ と表される．特に，次の関係に注意しておく．

$$2 = \frac{4 \cdot 2^n}{(2^n)^2 + (2^n)^2} \cdot 2^n < \pi_n < \frac{4 \cdot 2^n}{(2^n)^2} \cdot 2^n = 4.$$

また，$S_n(1/z\,;\,0, a)$ の値が，a に依存しないことにも注意されたい．

補題 8.2.8　$f(z)=Q(z)/P(z)$ とし，$\|P\|=1$ とする．さらに，$0<a<1/2$ として，$C(0,a)$ の各点 α (厳密には，$S_n(f\,;0,a)$ の計算に用いる各分点 α) および $\alpha=0$ で $|P(\alpha)|\geq\epsilon>0$ ならば，

$$|S_n(f\,;0,a)|<\frac{2^7a^3\|Q\|}{\epsilon^3(1-2a)}.$$

証明　$P(z)=\sum_{k=0}^N a_kz^k$, $Q(z)=\sum_{k=0}^M b_kz^k$ とし，定理の条件をすべて仮定する．いま，$g(z)=f(z)-f(0)-zf'(0)$ とおくと，補題 8.2.4 により，$S_n(g\,;0,a)=S_n(f\,;0,a)-S_n(f(0)\,;0,a)-S_n(z\,;0,a)f'(0)=S_n(f\,;0,a)$ である．$f(0)=b_0/a_0$, $f'(0)=(a_1b_0-a_0b_1)/a_0^2$ だから，

$$\begin{aligned}g(z)&=\frac{a_0^2Q(z)-a_0b_0P(z)-(a_0b_1-b_0a_1)zP(z)}{a_0^2P(z)}\\&=\frac{\sum_{k=2}^{\max\{N,M\}+1}(a_0^2b_k-a_0a_kb_0-a_0a_{k-1}b_1+a_1a_{k-1}b_0)z^k}{a_0^2P(z)}.\end{aligned}$$

但し，$a_k=0\ (k>N), b_k=0\ (k>M)$．すると，$|a_0|=|P(0)|\geq\epsilon$ などから，

$$|g(z)|\leq\frac{4\|P\|^2\|Q\|\sum_{k=2}^{\max\{N,M\}+1}(2a)^k}{|a_0|^2|P(z)|}\leq\frac{4\|Q\|}{\epsilon^3}\cdot\frac{(2a)^2}{1-2a}<\frac{2^4a^2\|Q\|}{\epsilon^3(1-2a)}$$

である．最後に，補題 8.2.5 により，

$$|S_n(f\,;0,a)|<\frac{2^7a^3\|Q\|}{\epsilon^3(1-2a)}$$

を得る．　□

補題 8.2.9　$f(z)=Q(z)/P(z)$ とし，P,Q は N 次以下の多項式で，$\|P\|=1$ とする．さらに，$0<a<1/2$, $|z_0|<R\ (\geq1)$ として，$C(z_0,a)$ の各点 α (厳密には，$S_n(f\,;z_0,a)$ の計算に用いる各分点 α) および $\alpha=z_0$ で $|P(\alpha)|\geq\epsilon>0$ ならば，

$$|S_n(f\,;z_0,a)|<\frac{2^7\gamma^3R^{3N}a^3\|Q\|}{\epsilon^3(1-2a)}.$$

但し，γ は二項係数 ${}_{N+1}C_{[(N+1)/2]}$ を表す．

証明　$P_1(z)=P(z_0+z)=\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}P^{(k)}(z_0)z^k$, $Q_1(z)=Q(z_0+z)=\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}Q^{(k)}(z_0)z^k$ とおくと，

$$\begin{aligned}\left|\frac{P^{(k)}(z_0)}{k!}\right| &= \left|\sum_{l=0}^{N-k}({}_{l+k}C_k)\,a_{l+k}z_0^l\right| \\ &< \|P\|R^{N-k}\sum_{l=0}^{N-k}{}_{l+k}C_k \le R^N{}_{N+1}C_{k+1} \le \gamma R^N.\end{aligned}$$

したがって $\|P_1\|<\gamma R^N$ となり，同様に $\|Q_1\|<\gamma R^N\|Q\|$ となる．そこで，有理関数 $f_1(z)=(Q_1(z)/\gamma R^N)/(P_1(z)/\gamma R^N)=f(z_0+z)$ に対して補題8.2.8を用いる．$|P(z_0+z)|\ge\epsilon$ のとき，$|P_1(z)/\gamma R^N|\ge\epsilon/\gamma R^N$ に注意して，

$$\begin{aligned}|S_n(f\,;z_0,a)|=|S_n(f_1\,;0,a)| &\le \frac{2^7a^3\|Q_1(z)/\gamma R^N\|}{(\epsilon/\gamma R^N)^3(1-2a)} \\ &\le \frac{2^7\gamma^3R^{3N}a^3\|Q\|}{\epsilon^3(1-2a)}\end{aligned}$$

を得る．　□

以下において，$D(z_0,a\,;n)$で，$z_{kl}=z_0-a-ia+(k+il)\frac{2a}{2^{n+1}}$ $(0\le k,l\le 2^{n+1})$ からなる集合を表す．つまり，これは正方形 $C(z_0,a)$ の各辺に 2^{n+1} 個の分点を取って作られる格子点の集合である．

補題 8.2.10　$P(z)$ は N 次多項式 $(N\ge1)$ で最高次係数が1であって，かつ $\|P\|=1$ とする．$a\ge5N$, $2^n>4a$, $m=\min_{\alpha\in D(0,a;n)}|P(\alpha)|$ とおくとき

$$m^3<\frac{K}{2^n}\qquad(\text{但し，}K=2^{3N+7}\gamma^3a^{3N+3}).$$

証明　$P(z)=\sum_{k=0}^{N}a_kz^k$ および a,n,m を補題の条件を満たすものとする．もし $m=0$ であれば補題の主張は自明であるから，$m>0$ とする．まず，有理式 $f(z)=P'(z)/P(z)$ に対し，補題8.2.6を用いると，

$$S_n(f\,;0,a)=\sum_{\substack{0<k,l<2^{n+1}\\ k,l\text{ は奇数}}}S_0\left(f\,;z_{kl},\frac{a}{2^n}\right)$$

である．但し，$z_{kl} = -a - ia + (k + il)\dfrac{2a}{2^{n+1}}$．いま，$R = 2a\ (\geq 10)$ とおけば，各 $|z_{kl}| < R$ であり，また補題の仮定より $0 < (a/2^n) < 1/4 < 1/2$ である．さらに，$S_0\left(f\ ;\ z_{kl}, \dfrac{a}{2^n}\right)$ の計算に用いる分点はすべて $D(0, a\ ;\ n)$ に属し，$m = \min_{\alpha \in D(0,a;n)} |P(\alpha)|$ だから，補題 8.2.9 を適用して，

$$\left|S_0\left(f\ ;\ z_{kl}, \frac{a}{2^n}\right)\right| < \frac{2^7 \gamma^3 (2a)^{3N} (a/2^n)^3 \|P'\|}{m^3 (1 - 2a/2^n)} = \frac{2^{3N+7} \gamma^3 a^{3N+3} \|P'\|}{m^3 (2^n - 2a) 2^{2n}}$$

を得る．そして，$2^n > 4a$ の仮定より $2^n - 2a > 2^n/2$ となることと，$\|P'\| = N$ を用い，補題 8.2.5 を使えば，

$$S_n(f\ ;\ 0, a) < \frac{2^{3N+8} \gamma^3 N a^{3N+3}}{m^3 2^n 2^{2n}} \times 2^{2n} = \frac{2NK}{m^3 2^n}$$

となる．ここで，$K = 2^{3N+7} \gamma^3 a^{3N+3}$ とおく．

一方，$N/z = P'/P + (NP - zP')/zP$ だから，

$$\begin{aligned} 2\pi_n N i &= S_n(N/z\ ;\ 0, a) \\ &= S_n(f\ ;\ 0, a) + S_n((NP - zP')/zP\ ;\ 0, a) \end{aligned}$$

である．いま $C(0, a)$ の周上の点 z に対し，$|z| \geq a > N \geq 1$ であるから，

$$|NP - zP'| = \left|\sum_{k=0}^{N-1} (N - k) a_k z^k\right| \leq N \sum_{k=0}^{N-1} |z|^k \leq N^2 |z|^{N-1},$$

$$|P(z)| \geq |z|^N - \sum_{k=0}^{N-1} |a_k| |z|^k \geq |z|^N - N|z|^{N-1}.$$

これらより，

$$\left|\frac{NP - zP'}{zP}\right| \leq \frac{N^2}{|z|(|z| - N)}$$

となる．よって，補題 8.2.5 より

$$|S_n((NP - zP')/zP\ ;\ 0, a)| \leq \frac{8aN^2}{a(a - N)} = \frac{8N^2}{a - N}$$

を得る．以上をまとめて，

$$4N < |2\pi_n N i| < \frac{2NK}{m^3 2^n} + \frac{8N^2}{a - N}$$

となるので，さらに仮定の $a > 5N$ を用いて整理すれば，

$$m^3 < \frac{K}{2^n}$$

を得る．　□

定理 8.2.11　$P(z)$ を最高次係数が1である N 次多項式($N \geq 1$)とし，$a \geq 5N\|P\|$ とする．このとき $2^n > 4a$ となる任意の自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対し，

$$\min_{\alpha \in D(0,a;n')} |P(\alpha)| < 2^{-n}$$

となる自然数 n' が存在する．さらに，n に n' を対応させる原始再帰的関数が存在する．

証明　$P(z)$ を最高次係数が1である N 次多項式($N \geq 1$)とし，$a \geq 5N\|P\|$ かつ $2^n > 4a$ を仮定する．いま，$P_1(z) = P(\|P\|z)/\|P\|^N$ とおくと，$P_1(z)$ は最高次係数が1であって，かつ $\|P_1\| = 1$ となる．そして，$a_1 = a/\|P\| \geq 5N$ とおくと，$2^n > 4a \geq 4a_1$ だから，補題 8.2.10 が使えて，

$$\left(\min_{\alpha \in D(0,a_1;n)} |P_1(\alpha)|\right)^3 < \frac{K_1}{2^n} \quad (\text{但し } K_1 = 2^{3N+7}\gamma^3 a_1^{3N+3}).$$

したがって，

$$\left(\min_{\alpha \in D(0,a;n)} \left|\frac{P(\alpha)}{\|P\|^N}\right|\right)^3 < \frac{K_1}{2^n} \quad (\text{但し } K_1 = 2^{3N+7}\gamma^3 (a/\|P\|)^{3N+3}).$$

ここで，$K = 2^{3N+7}\gamma^3\|P\|^{-3}a^{3N+3}$ とおくと，

$$\left(\min_{\alpha \in D(0,a;n)} |P(\alpha)|\right)^3 < \frac{K}{2^n}.$$

いま，自然数 n'' を $2^{n''} > K$ となる最小の自然数とする．$n' = 3n + n''$ とおくと，

$$\left(\min_{\alpha \in D(0,a;n')} |P(\alpha)|\right)^3 < \frac{2^{n''}}{2^{n'}} = 2^{-3n}$$

となるから，n' が求める数である．ここで，n に n' を対応させる関数は明らかに原始再帰的であり，その存在は RCA_0 でいえる．　□

この定理により，与えられた多項式 $P(z)$ に対して，いくらでもいい近似根を $D(0, a\,;\,n')$ の中に求めることができる．特に，$P(z)$ が，有理複素数 $\mathbb{E} = \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ を係数とする多項式であれば，その近似根を有理複素数として求められる．

いま，最高次係数が1であるような1次以上の $\mathbb{E}$ 係数多項式の全体を $\mathbb{E}[z]_{\mathrm{mon}}$ で表す．すると，関数 $\xi : \mathbb{E}[z]_{\mathrm{mon}}\times\mathbb{N}\to\mathbb{E}$ が存在し，任意の $P \in \mathbb{E}[z]_{\mathrm{mon}}$ と任意の $n\le\mathbb{N}$ に対して，

$$|P(\xi(P, n))| < 2^{-n}.$$

となる．このとき，関数 ξ は，前章の定理7.1.6により，$|\xi(P, n)| < 1 + \|P\|$ を成り立たせることに注意しておく．

次に，N 次多項式 $P\in\mathbb{E}[z]_{\mathrm{mon}}$ の N 個の近似根を並べ上げる関数 $\zeta(P, n)$ を定義する．すなわち，$(z-(\zeta(P, n))_0)\cdots(z-(\zeta(P, n))_{N-1})$ が $P(z)$ を近似するように $\zeta(P, n)$ を定めたい．そこで，まず $P(z)$ を $(z-\xi(P, n))$ で割った商を $P_n'(z)$ とする（すなわち，$P(z) = P(\xi(P, n)) + (z-\xi(P, n))P_n'(z)$）．そして，$\zeta(P, n)$ を次のように帰納的に定める．

$$\zeta(z-a_0, n) = \langle a_0\rangle,$$
$$\zeta(P, n) = \langle\xi(P, t)\rangle\frown\zeta(P_t', n) \quad (\deg P > 1 \text{ のとき}).$$

ここで，$t = \deg P\cdot(n+1)+1$ である．

$\tilde{P}^n = (z-(\zeta(P, t))_0)\cdots(z-(\zeta(P, t))_{\deg P-1})$ として，次が成り立つ．

補題 8.2.12 原始再帰的関数 $\delta : \mathbb{Q}^+\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ が存在して，任意の $P\in\mathbb{E}[z]_{\mathrm{mon}}$, $\deg P = N$, $\|P\| < R$, $n\in\mathbb{N}$ に対し，

$$\|P-\tilde{P}^{\delta(R,N,n)}\| < 2^{-n}.$$

但し，$\mathbb{Q}^+$ は正の有理数全体を表す．

証明 $N=1$ の場合は，任意の m に対して $P=\tilde{P}^m$ だから，$\delta(R, N, n) = 1$ とおけばよい．$N>1$ とする．まず $t = N(n+1)+1$ とおいて，

$$\begin{aligned}\|P-\tilde{P}^n\| &= \|P(\xi(P,t))+(z-\xi(P,t))(P'_t-\tilde{P}'^n_t)\| \\ &\le 2^{-t}+(1+|\xi(P,t)|)\|P'_t-\tilde{P}'^n_t\| \\ &\le 2^{-N(n+1)-1}+(2+\|P\|)\|P'_t-\tilde{P}'^n_t\|\end{aligned}$$

である．そこで，$2^{-N(n+1)-1}+(2+\|P\|)2^{-k}<2^{-n}$ となる最小の k を選んで，$\delta(\|P\|,N,n)=\max\{\delta(\|P'_t\|+1,N-1,k),n\}$ とおけばよい． □

また，次の補題がいえる．

補題 8.2.13　任意の N 次多項式 $P\in\mathbb{E}[z]_{\mathrm{mon}}$ と，$|P(z)|<2^{-N\cdot(n+1)-1}$ となる任意の近似根 $z\in\mathbb{E}$ に対し，ある $l<N$ が存在して，

$$|z-(\zeta(P,n))_l|<2^{-n}.$$

証明　$N=\deg P$ に関する Π^0_1-帰納法で証明する．$N=1$ のときは，$|z-a_0|<2^{-(n+1)-1}$ ならば，$|(\zeta(P,n))_0-z|=|a_0-z|<2^{-n}$ より成立する．$N>1$ の場合は，$t=N(n+1)+1$，$P(z)=P(\xi(P,t))+(z-\xi(P,t))P'_t(z)$ として，

$$\begin{aligned}|(z-\xi(P,t))P'_t(z)| &\le |P(z)|+|P(\xi(P,t))| \\ &< 2^{-N(n+1)-1}+2^{-t} \\ &< 2^{-N(n+1)}.\end{aligned}$$

したがって，$|z-\xi(P,t)|<2^{-n}$ または $|P'_t(z)|<2^{-N(n+1)+n}=2^{-(N-1)(n+1)-1}$．後者の場合，帰納法の仮定により，ある $l<N$ に対し，$|z-(\zeta(P'_t,n))_l|<2^{-n}$ だから，$|z-(\zeta(P,n))_{l+1}|<2^{-n}$ となる． □

多項式の係数を変化させるとき，多項式の根全体の変動が連続になるというのが，次の補題の主張である．

補題 8.2.14　以下を満たす原始再帰的関数 $\nu:\mathbb{Q}^+\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ が存在する．$z_0,\cdots,z_{N-1},w_0,\cdots,w_{N-1}\in\mathbb{E}$，$P(z)=(z-z_0)\cdots(z-z_{N-1})$，$Q(z)=(z-w_0)\cdots(z-w_{N-1})$ に対して，$\|P\|<R$，$\|Q\|<R$，$\|P-Q\|<$

$2^{-\nu(R,N,n)}$ となる $R \in \mathbb{Q}^+$ が存在すれば，$\{0, 1, \cdots, N-1\}$ 上の置換 σ で，$|z_0 - w_{\sigma(0)}| < 2^{-n}, \cdots, |z_{N-1} - w_{\sigma(N-1)}| < 2^{-n}$ を満たすものがある．

証明 ν の原始再帰的な定義を与える．$N = 1$ のとき，$\|P - Q\| = |z_0 - w_0|$ だから，$\nu(R, 1, n) = n$ とおけばよい．$N > 1$ のとき，$\|P - Q\| < 2^{-M}$ とすると，$|Q(z_0)| = |P(z_0) - Q(z_0)| < 2^{-M}(|z_0|^N + \cdots + |z_0| + 1)$ だから，補題 8.2.13 を使って右辺がさらに $2^{-N(n+1)-1}$ 以下になるように $M = M(n)$ をとれば，ある $l < N$ が存在して $|z_0 - w_l| < 2^{-n}$ がいえる．いま簡単のため，$l = 0$ とおく．あとは，$P^\star(z) = P(z)/(z - z_0)$，$Q^\star(z) = Q(z)/(z - w_0)$ とおいて，$\|P^\star\| < R^\star$，$\|Q^\star\| < R^\star$，$\|P^\star - Q^\star\| < 2^{-\nu(R^\star, N-1, n)}$ となる $R^\star \in \mathbb{Q}^+$ が存在することがいえればよい．

まず，次の 2 つの事実を確認しておく．

<u>部分補題 1</u> 原始再帰的関数 $L_1 : \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が存在し，$P \in \mathbb{E}[z]$ (最高次係数が 1 とは限らない) について $\|P\| < R$，$|a| < 1 + R$ が成り立っていれば，

$$\left\| \frac{P(z) - P(a)}{z - a} \right\| \leq L_1(R, N) \|P\|.$$

(証明) $L_1'(R, N) > 1 + \|P\| + P(a)$ とおくと，$P(z) - P(a)$ のすべての根の絶対値は (したがって $\dfrac{P(z) - P(a)}{z - a}$ の根の絶対値も)，$L_1'(R, N)$ 以下である．根と係数の関係から，$\dfrac{P(z) - P(a)}{z - a}$ の k 次の係数の絶対値は，$\|P\|_{N-1}C_k L_1'(R, N)^{N-k-1}$ 以下になるので，${}_{N-1}C_k L_1'(R, N)^{N-k-1}$ の最大値を $L_1(R, N)$ とおけば，$\left\| \dfrac{P(z) - P(a)}{z - a} \right\| \leq L_1(R, N) \|P\|$ となる．

<u>部分補題 2</u> 原始再帰的関数 $L_2 : \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が存在し，$P \in \mathbb{E}[z]$ (最高次係数が 1 とは限らない) について $\|P\| < R$，$|a| < 1 + R$，$|b| < 1 + R$ が成り立てば，

$$\left\| \frac{P(z) - P(a)}{z - a} - \frac{P(z) - P(b)}{z - b} \right\| \leq L_2(R, N) |a - b|.$$

(証明)　$\dfrac{P(z)-P(a)}{z-a}-\dfrac{P(z)-P(b)}{z-b}$ は，a, b, z に関する多項式で，$a=b$ とすると 0 になるので $(a-b)$ で割り切れる．その商を z に関する多項式と見ると，$\|P\|<R$, $|a|<1+R$, $|b|<1+R$ の条件から，各係数が原始再帰的関数 $L_2(R, N)$ で上から押さえられることは明らかである．

ここで，補題の証明に戻る．まず部分補題1より，$\|P^\star\|<R^\star$, $\|Q^\star\|<R^\star$ となる $R^\star$ が R と N の関数としてとれる．その上で，$\|P^\star-Q^\star\|<2^{-\nu(R^\star, N-1, n)}$ にしたい．いま

$$\begin{aligned}\|P^\star-Q^\star\| &= \left\|\frac{P(z)}{z-z_0}-\frac{Q(z)}{z-w_0}\right\| \\ &\leq \left\|\frac{P(z)-P(z_0)}{z-z_0}-\frac{P(z)-P(w_0)}{z-w_0}\right\| \\ &\quad+\left\|\frac{(P(z)-Q(z))-(P(w_0)-Q(w_0))}{z-w_0}\right\| \\ &\leq L_2(R, N)\,|z_0-w_0|+L_1(R, N)\,\|P-Q\|\end{aligned}$$

である．そこで，$2^{-k}\leq\dfrac{2^{-\nu(R^\star, N-1, n)-1}}{L_2(R, N)}$ となる $k\ (\geq n)$ をとり，

$$2^{-\nu(R, N, n)}\leq\max\left\{2^{-M(k)}, \frac{2^{-\nu(R^\star, N-1, n)-1}}{L_1(R, N)}\right\}$$

となる $\nu(R, N, n)$ を選ぶ．すると，$\|P-Q\|<2^{-\nu(R, N, n)}$ であれば，

$$L_2(R, N)\,|z_0-w_0|<2^{-\nu(R^\star, N-1, n)-1},\ \text{かつ}$$
$$L_1(R, N)\,\|P-Q\|<2^{-\nu(R^\star, N-1, n)-1}$$

となるから，$\|P^\star-Q^\star\|<2^{-\nu(R^\star, N-1, n)}$ となる．この定義から，$\nu(R, N, n)$ が原始再帰的関数になることは明らか．　□

定理 8.2.15（**代数学の基本定理**）　RCA_0 で以下が示せる．任意の $a_0, \cdots, a_{N-1}\in\mathbb{C}$ に対し，

$$a_0+a_1z+\cdots+a_{N-1}z^{N-1}+z^N=(z-b_0)\cdots(z-b_{N-1})$$

なる複素数列 $b_0, \cdots, b_{N-1}$ がとれる．

証明 各 a_k を，$\mathbb{E}$ の元の列 $\{a_{k,j} : j \in \mathbb{N}\}$ で，$\forall j \forall l\, |a_{k,j} - a_{k,j+l}| \leq 2^{-k}$ を満たすものと仮定してよい．（複素数の定義にしたがえば実部と虚部を別々に考えるべきだが，任意の複素数 $\{a_{k,j}\}$ に対して，$\{a_{k,j+1}\}$ は同じ数を表し，この性質を成り立たせるものになる．）このとき，$P_j = a_{0,j} + a_{1,j}z + \cdots + a_{N-1,j}z^{N-1} + z^N$ とおくと，任意の j, l に対し $\|P_j - P_{j+l}\| \leq 2^{-j}$．また，$R = \|P_0\| + 1$ とすれば，任意の j に対し $\|P_j\| < R$．最後に，$\tilde{P}_j = \widetilde{P_{j+1}}^{\delta(R,N,j+2)}$（$\delta$ は補題 8.2.12 の関数）とおくと，$k \geq 0$ に対して

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{P}_j - \widetilde{P_{j+k}}\| &\leq \|\tilde{P}_j - P_{j+1}\| + \|P_{j+1} - P_{j+k+1}\| + \|P_{j+k+1} - \widetilde{P_{j+k}}\| \\
&< 2^{-j-2} + 2^{-j-1} + 2^{-j-2} \\
&= 2^{-j}.
\end{aligned}
$$

そこで，与えられた多項式の近似有理根の列 B_n を以下のように定める．B_0 は，$\widetilde{P_{\nu(R,N,1)}}$ の有理根の列である．$B_{n+1} = (b_{0,n+1}, \cdots, b_{N-1,n+1})$ は，$\widetilde{P_{\nu(R,N,n+2)}}$ の根の列であり，各 j で $|b_{j,n} - b_{j,n+1}| < 2^{-n-1}$ となるものとする．このような B_{n+1} がとれることは，上の補題 8.2.14 による．あとは，$b_j = \{b_{j,n} : n \in \mathbb{N}\}$ とおくと，これが求める複素根になることは明らかである． □

8.3 実数の完備性とコンパクト性

本節では，RCA_0 では証明できない実数の性質を調べる．8.1 節では区間縮小法の原理を RCA_0 において証明したが，点列コンパクト性など重要な位相的性質は RCA_0 では証明できず，それより真に強い体系 ACA_0 が必要十分になる．さらに興味深いことは，数学の多くの有名な定理が，RCA_0 と ACA_0 の中間にある体系 WKL_0 と同値になるという事実である．これは，Hilbert のプログラムと関連して重要な意味があり，この点については本節の最後で触れる．

定義 8.3.1　算術的内包公理の体系(the system of arithmetical comprehension axioms) ACA_0 は，RCA_0 に次の公理を加えたものである：

$$(\Pi^1_0\text{-CA}):\quad \exists X\,\forall n\,(n \in X \leftrightarrow \varphi(n)).$$

ここで，$\varphi(n)$ は算術式(Π^1_0 式)で，X を自由変数としてもたないものとする．

補題 8.3.2　ACA_0 はペアノ算術 PA の保存的拡大になっている．つまり，PA の定理は ACA_0 で証明でき，ACA_0 で証明できる1階算術 $\mathcal{L}_{\mathrm{OR}}$ の文は PA の定理になる．

証明　PA のすべての定理が ACA_0 で証明できることをいうためには，任意の算術的論理式に関する帰納法が ACA_0 で証明できることを示せばよい．そこで，$\varphi(n)$ を任意の算術的論理式とし，$\varphi(0) \wedge \forall n\,(\varphi(n) \to \varphi(n+1))$ を仮定する．算術的内包公理より，$\forall n\,(n \in X \leftrightarrow \varphi(n))$ となる X の存在がいえる．この X について，$0 \in X \wedge \forall n\,(n \in X \to n+1 \in X)$ が導けるので，これに Σ^0_1-帰納法を適用して $\forall n\,(n \in X)$，したがって $\forall n\,\varphi(n)$ を得る．

逆に，ACA_0 で証明できる1階算術の命題が PA の定理になることは，RCA_0 が $\mathrm{I}\Sigma_1$ の保存的拡大になることを示したのと同じ方法(補題 8.1.3)で証明できる．　□

PA は，$\mathrm{I}\Sigma_1$ の真の拡大であるから(文献［田 1］)，ACA_0 は RCA_0 の真の拡大であることもわかる．

次の補題は，種々の命題と ACA_0 との同値をいうために用いられる．

補題 8.3.3　RCA_0 において以下は同値である．

(1)　ACA_0,

(2)　$(\Sigma^0_1\text{-CA})$,

(3)　任意の 1-1 関数 $f:\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ の値域が存在する．

証明 (1) ⇒ (2) は明らか．(2) ⇒ (3) も，値域が Σ^0_1 で表せること ($n \in \mathrm{Range}(f) \leftrightarrow \exists m\, f(m) = n$) から明らか．

(3) ⇒ (2) を示す．任意の Σ^0_1 論理式 $\varphi(n)$ は，Σ^0_0 論理式 $\theta(m, n)$ を使って，$\varphi(n) \leftrightarrow \exists m\, \theta(m, n)$ と表せる．いま，(Σ^0_0-CA) より，集合 Y を

$$(m, n) \in Y \leftrightarrow \theta(m, n) \wedge \forall m' < m \neg\theta(m', n)$$

で定義する．Y が有界ならば，ある k が存在して，

$$\varphi(n) \leftrightarrow \exists m < k\, (m, n) \in Y$$

となるから，有限集合 $X = \{n : \varphi(n)\}$ の存在が (Σ^0_0-CA) でいえる．そうでなければ，Y の要素を(大きさの順に)並べ上げる原始再帰的関数，つまり $\mathbb{N}$ から Y の上への 1 対 1 関数 g が作れる．さらに，ペア (m, n) の第 2 要素 n を取り出す射影関数 $p_2(m, n) = n$ も原始再帰的だから，$f = p_2 \cdot g$ とおけば，f も 1 対 1 原始再帰的関数であり，その値域は $\{n : \varphi(n)\}$ になる．よって，(3) ならば (2) が成り立つ．

(2) ⇒ (1) を示す．(Σ^0_1-CA) → (Σ^0_k-CA) を k についてのメタ帰納法で証明する．$k \leq 1$ のとき明らか．$\varphi(n)$ を任意の Σ^0_{k+1} 論理式とし，Σ^0_k 論理式 $\theta(m, n)$ を使って，$\varphi(n) \leftrightarrow \exists m \neg\theta(m, n)$ と表す．(Σ^0_k-CA) により，$Y = \{(m, n) : \theta(m, n)\}$ が存在する．そして，(Σ^0_1-CA) によって，$X = \{n : \exists m \neg(m, n) \in Y\}$ も存在し，明らかに $n \in X \leftrightarrow \varphi(n)$ である．よって，(Σ^0_{k+1}-CA) が成り立つ． □

次の定理は，実数の完備性(項目 (3))や点列コンパクト性(項目 (2))が RCA_0 で証明できないだけでなく，それぞれが ACA_0 と同値になることをいうものである．

定理 8.3.4 次のどの命題も RCA_0 上で同値である．

(1) ACA_0,

(2) Bolzano-Weierstrass の定理： 有界な実数列は収束部分列をもつ,

(3) コーシー列は収束する,

（4）　有界な実数列は上限をもつ，

（5）　単調収束定理：　有界な増加列は収束する．

証明　(1) ⇒ (2), (3), (4), (5) は普通の数学と変らないので省略する．(縮小区間列を使い，各区間に数列の点が1つ以上入る，あるいは無限個入るなどの条件が算術的に表現できることに注意すればよい．）　また，(5) は (2), (3), (4) のどれからでも直ちに導けるので，あとは (5) から (1) を示せばよい．

(5) を仮定する．補題8.3.3を用いるために，$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ を任意の1-1関数とする．

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} 2^{-f(i)}$$

によって，有界な増加有理数列 $\{c_n\}$ を定義すれば，単調収束定理から

$$c = \lim_{n\to\infty} c_n = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-f(i)}$$

が存在する．すると，任意の n について，

$$\begin{aligned} n \in \mathrm{Range}(f) &\leftrightarrow \exists m\, f(m) = n \\ &\leftrightarrow \forall k\,(|c_k - c| < 2^{-n} \to \exists m \le k\,(f(m) = n)) \end{aligned}$$

となることがわかる．したがって，(Δ^0_1-CA) により $\mathrm{Range}(f)$ が存在し，補題8.3.3により ACA_0 が導かれた．□

定理8.3.4の結果にも関わらず，解析学の多くの重要定理が，ACA_0 より真に弱い WKL_0 で証明でき，またさらにそれと同値になることもわかる．以下で，その現象の一端を見ていこう．まず，体系 WKL_0 を定義するために，必要な概念を導入する．

各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，定義域 $\{i \in \mathbb{N} : i < n\}$ をもつ関数のコード s ($\in \mathbb{N}$) を長さ $n = \mathrm{leng}(s)$ の**有限列**という．特に0または1の値だけをとる有限列を**2進列**と呼び，2進列のコード全体を Seq_2 と表す．Seq_2 の部分集合 T で，その各要素のすべての**始切片**(initial segment)が再び T の要素となるようなものを**木**(tree)と呼ぶ．ここで，s が t の始切片であるとは，s と t

を集合(関数のグラフ)として見たとき，s が t の部分集合になることである．木 T の部分集合で，それ自身木であって，枝別れのない(つまり，任意の2つの要素に対し必ずどちらか一方が他方の始切片になる)ものを T の**道**(path)という．

定義 8.3.5 Seq_2 の無限部分木が必ず無限長の道をもつという主張を**弱 König の補題**(weak König's lemma)という．RCA_0 にこれを公理として加えたものを体系 WKL_0 とする．

WKL_0 が RCA_0 より真に強い体系であることを示す前に，次の有用な補題を証明しておこう．

補題 8.3.6 RCA_0 において，WKL_0 は次の主張と同値である：

$$(\Sigma^0_1\text{-SP}):\quad \forall n\,(\varphi(n) \to \psi(n)) \to$$
$$\exists X\,\forall n\{(\varphi(n) \to n \in X) \land (n \in X \to \psi(n))\},$$

但し，$\varphi(n)$ は Σ^0_1 論理式で，$\psi(n)$ は Π^0_1 論理式であり，どちらも X を自由変数として含まないものとする．

SP は**分離原理**(Separation Principle)を意味する．上の分離原理において，前提の $\forall n\,(\varphi(n) \to \psi(n))$ を $\forall n\,(\varphi(n) \leftrightarrow \psi(n))$ に直したものが Δ^0_1-内包公理である．この補題を使えば，次は容易である．

系 8.3.7 WKL_0 は RCA_0 より真に強い．

証明 RCA_0 の最小モデル (ω, Rec) が WKL_0 のモデルにならないことを示せば十分．ここで，ω は標準自然数全体の集合で，Rec は ω の再帰的部分集合全体を表す．定理 2.5.5 により，再帰的に分離できない 2 つの RE 集合(を定義する Σ^0_1 論理式)がある．したがって，$(\Sigma^0_1\text{-SP})$ は (ω, Rec) で成り立たない． □

補題 8.3.6 の証明 まず，WKL_0 において Σ^0_1-分離原理が成り立つことをいう．2つ Σ^0_1 式 $\varphi_0(n), \varphi_1(n)$ が与えられ，$\forall n\,(\varphi_0(n) \to \neg\,\varphi_1(n))$，すなわち $\forall n\,\neg(\varphi_0(n) \wedge \varphi_1(n))$ と仮定する．いま，$\varphi_i(n) \equiv \exists m\,\theta_i(m, n)$，但し $\theta_i(m, n) \in \Sigma^0_0$ としてよい．すると，次のような集合 $T \subseteq Seq_2$ が RCA_0 で定義できる：

$t \in T \Leftrightarrow$

$$\forall m, n < \mathrm{leng}(t)\,[(\theta_0(m, n) \to t(n) = 0) \wedge (\theta_1(m, n) \to t(n) = 1)].$$

この T が無限木になることは容易にわかるので，弱 König の補題より無限長の道 f が存在する．そこで $X = \{n : f(n) = 0\}$ とおけば $\forall n\{(\varphi_0(n) \to n \in X) \wedge (n \in X \to \neg\,\varphi_1(n))\}$ となることは明らかである．

次は，Σ^0_1-分離原理を使って，弱 König の補題を導く．任意の無限木 $T \subseteq Seq_2$ を選んで固定しておく．いま，$i = 0, 1$ に対して，"$s \in Seq_2$ かつ $\{t \in T : s^\frown i \subseteq t\}$ が有限である" を表す Σ^0_1 論理式を $\varphi_i(s)$ とおく．ここで，$s^\frown i$ は2進列 s のあとに文字 i を付けたもので，厳密には $s \cup \{(\mathrm{leng}(s), i)\}$ である．また "木 T' が有限である" ことは十分大きな n に対して $T' \subseteq \{0, 1\}^n$ と表現すれば，Σ^0_1 論理式で書ける．いま，$\varphi_i(s) \equiv \exists m\,\theta_i(m, s)$ 但し $\theta_i(m, s) \in \Sigma^0_0$ とおき，さらに Σ^0_1-分離原理を使うために

$$\varphi'_0(s) \equiv \exists m\,(\theta_0(m, s) \wedge \forall k < m\,\neg\,\theta_1(k, s)),$$
$$\varphi'_1(s) \equiv \exists m\,(\theta_1(m, s) \wedge \forall k \leq m\,\neg\,\theta_0(k, s))$$

の修正を行う．すると，$\forall n\,\neg(\varphi'_0(n) \wedge \varphi'_1(n))$，すなわち $\forall n\,(\varphi'_0(n) \to \neg\,\varphi'_1(n))$ が成り立つから，Σ^0_1-分離原理によって，$\forall n\{(\varphi'_0(n) \to n \in X) \wedge (n \in X \to \neg\,\varphi'_1(n))\}$ となる X が存在する．

さて，この X を使って，2進列の増加列 $s_0 \subset s_1 \subset \cdots$ を次のように再帰的に定義する．s_0 を空列とする．$s_n \in X$ のとき $s_{n+1} = s_n{}^\frown\{1\}$，そうでないとき $s_{n+1} = s_n{}^\frown\{0\}$ とおく．すると，任意の n について，$\{t \in T : s_n \subseteq t\}$ は無限集合であり，特に $s_n \in T$ であることは簡単に確かめられる．したがって，$f = \{s_n\}$ は T の無限長の道になる． □

それでは，実数の話に戻ろう．有理端点 p, q $(p < q)$ をもつ**開区間**の自然数コードを (p, q) で表す．$\mathbb{R}$ の**開集合**は開区間のコードの集合として定義(コード化)される．さて，$\mathbb{R}$ の開集合 U が閉区間 $[0, 1]$ を**覆う**(の**被覆**である)ことを，任意の実数 $x \in [0, 1]$ に対して，あるコード $(p, q) \in U$ が存在して，$p < x < q$ となることとする．このとき，開集合 U が閉区間 $[0, 1]$ を覆えば，U の有限部分集合 U' でやはり $[0, 1]$ を覆うものが存在するというのが，**Heine-Borel の被覆定理**である．まず，この定理が WKL_0 で証明できることを示そう．

補題 8.3.8 Heine-Borel の定理は WKL_0 で証明できる．

証明 まず，各 $s \in Seq_2$ に，次のように定義される有理開区間 (a_s, b_s) を対応させる．

$$a_s = \sum_{i<\mathrm{leng}(s)} \frac{s(i)}{2^{i+1}},$$

$$b_s = a_s + \frac{1}{2^{\mathrm{leng}(s)}}.$$

このとき，$s \subseteq t$ ならば，$(a_t, b_t) \subseteq (a_s, b_s)$ である．

いま，$[0, 1]$ の開被覆 U が与えられたとする．直観を助けるために，コード i をもつ開区間を (p_i, q_i) と表すことにする．そして，木 $T \subseteq Seq_2$ を以下のように定義する．

$$s \in T \Leftrightarrow \neg \exists i \leq \mathrm{leng}(s)\ (i \in U \wedge p_i < a_s < b_s < q_i).$$

この T が無限長の道をもたないことを示す．そのために，道 $f \subseteq T$ があるとして矛盾を導こう．区間縮小法により，すべての $s \in f$ に対し $a_s \leq x \leq b_s$ となる実数 x が(ただ 1 つ)存在する．開集合 U は $[0, 1]$ を覆っているから，ある $i \in U$ が存在して，実数 x は開区間 (p_i, q_i) に含まれる．このとき，十分長い $s \in f$ をとれば，$p_i < a_s \leq x \leq b_s < q_i$ となるはずである．しかし，これは $s \notin T$ を意味するので，矛盾である．

T が無限長の道をもたないならば，弱 König の補題より，T は有限集合

である．つまり，十分大きな n が存在して，T に属する列の長さはすべて n より短い．したがって，$\forall s\,(\mathrm{leng}(s)=s \to \exists i \le n\,(i \in U \wedge p_i < a_s < b_s < q_i))$．よって，$\{i \in U : i \le n\}$ は $[0,1]$ の有限被覆になっている． □

定理 8.3.9 RCA_0 において WKL_0 と Heine-Borel の定理は同値である．

証明 すでに WKL_0 で Heine-Borel の定理が成り立つことを示したので，Heine-Borel の定理を仮定して，弱 König の補題を導けばよい．最初に，証明のアイデアを述べておく．Heine-Borel の定理は $[0,1]$ のコンパクト性を意味するので，その閉部分集合 $\{\Sigma_{i=0}^{\infty} f(i)\cdot 3^{-i-1} : f \in \{0,2\}^{\mathbf{N}}\}$（3 進集合）のコンパクト性がいえ，よって 3 進集合と同相であるカントル空間 $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ のコンパクト性も導け，それは WKL_0 を含意する．

まず，準備として，各 $s \in Seq_2$ に，次のように定義される有理開区間 (a_s, b_s) を対応させる．

$$a_s = \sum_{i<\mathrm{leng}(s)} \frac{2s(i)}{3^{i+1}},$$

$$b_s = a_s + \frac{1}{3^{\mathrm{leng}(s)}}.$$

2 進列 s のあとに文字 i を付けたもの $s \cup \{(\mathrm{leng}(s), i)\}$ を簡単に $s^\frown i$ と表すことにすると，閉区間 $[a_{s^\frown 0}, b_{s^\frown 0}]$ と閉区間 $[a_{s^\frown 1}, b_{s^\frown 1}]$ は，それぞれ閉区間 $[a_s, b_s]$ の左右 3 分の 1 になっている．したがって，3 進集合 $\{\Sigma_{i=0}^{\infty} f(i)\cdot 3^{-i-1} : f \in \{0,2\}^{\mathbf{N}}\}$ に属さない実数 x に対しては，それを含む開区間 $(b_{s^\frown 0}, a_{s^\frown 1})$ がただ 1 つ存在する．

さらに，各 $s \in Seq_2$ に対し，

$$a'_s = a_s - \frac{1}{3^{\mathrm{leng}(s)+1}},$$

$$b'_s = b_s + \frac{1}{3^{\mathrm{leng}(s)+1}}$$

とおく．ある集合 $A \subseteq T$ が任意の無限長の道 $f \subseteq T$ と 1 つ以上の要素を

共有するならば，開集合 $\{(a'_s, b'_s) : s \in A\}$ は3進集合の被覆となることが容易に示せる．また，2つの開区間 (a'_s, b'_s), (a'_t, b'_t) が共通部分をもつのは，s と t のどちらか一方が他方の始切片になる場合に限られる．

さて，$T \subseteq Seq_2$ を無限長の道をもたない任意の木とし，T が有限であることを示そう．ここで，B を T に含まれない極小の2進列の集まりとする．つまり，$s \in B \Leftrightarrow s \notin T \land \forall t \subset s (t \neq s \to t \in T)$ とする．このとき，任意の無限長の道 $f \subseteq T$ が B と丁度1つの要素を共有することは明らかである．

そこで，$U = \{(a'_s, b'_s) : s \in B\} \cup \{(b_{s^\frown 0}, a_{s^\frown 1}) : s \in Seq_2\}$ とおけば，U は $[0,1]$ の開被覆になっている．Heine-Borel の定理により，U の有限部分被覆 U' が存在する．どの $s \in B$ についても，(a'_s, b'_s) は他の $(a'_t, b'_t) \in U$ とは交わらないし，(a'_s, b'_s) は3進集合の補集合である $\bigcup\{(b_{s^\frown 0}, a_{s^\frown 1}) : s \in Seq_2\}$ の部分集合にもならないので，U'は $\{(a'_s, b'_s) : s \in B\}$ を完全に含む．したがって，B は有限集合である．B の要素の始切片全体から B の要素を除いてできる集合が T だから，それもまた有限である．□

$[0,1]$ の Heine-Borel 性があれば，連続関数 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ の様々な性質が導けることは普通の数学の議論から容易に推測できると思うが，逆にそれらの性質から WKL_0 を導くことができる．実際，次のような定理が成り立つ．

定理 8.3.10 次はどれも RCA_0 上で同値になる．

(1) WKL_0,

(2) 連続関数 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ は一様連続である，

(3) 連続関数 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ は最大値をもつ．

証明 (1) から (2), (3) を導くことの詳細は，文献 [Sim] や [田 2] を参照．ここでは，(1) を否定して，(2) と (3) の反例を同時に作る．(1) の否

定を仮定すると，無限長の道をもたない無限木 $T \subseteq Seq_2$ が存在する．Heine-Borel の定理の証明でしたように，各 $s \in Seq_2$ に対し，2つの有理数 a_s, b_s を定義する．いま，B を T に含まれない極小の2進列全体とし，$s \in B$ に対して，閉区間 $[a_s, b_s]$ を対応させて，その全体を J とおく．すると，各実数 $x \in [0,1]$ は J に含まれるどれか1つの区間の内点であるか，あるいは1つまたは2つの区間の端点になる．このような性質をもつ無限集合 J を**特異閉被覆**と呼ぶ．

J に属する各区間 $[a_s, b_s]$ において定義される連続関数 f_s を次のように定義する：

$$f_s(x) = \begin{cases} \mathrm{leng}(s)\dfrac{2(x-a_s)}{a_s+b_s} & (a_s \leq x \leq (a_s+b_s)/2 \text{ のとき}), \\ \mathrm{leng}(s)\dfrac{2(b_s-x)}{a_s+b_s} & ((a_s+b_s)/2 \leq x \leq b_s \text{ のとき}). \end{cases}$$

すなわち，f_s は両端点 $x = a_s, b_s$ で0をとり，中点 $x = \dfrac{(a_s+b_s)}{2}$ で $\mathrm{leng}(s)$ をとり，それ以外では端点と中点の値を直線で結んで定義されるものである．そして，これらの関数 f_s をすべてつなぎ合わせたものを f とおくと，f は明らかに連続だが有界ではない．したがって，一様連続ではなく，最大値も存在しない．(厳密には，連続関数 f のコードの存在も調べる必要があるが，それは読者に任せる．)　□

さらに WKL_0 と同値になる主な命題をあげると次のようなものがある．

(1)　Brouwer の不動点定理．

(2)　微分方程式についての Peano の定理．

(3)　Weierstrass の多項式近似定理．

(4)　可分バナッハ空間の Hahn-Banach の定理．

(5)　可分コンパクト群のハール測度の存在．

(6)　可算な可換環は素イデアルをもつ．

(7)　Gödel の完全性定理．

WKL_0 では，RCA_0 で証明できない多くの定理が証明できるが，算術的命題に関しては，WKL_0 と RCA_0 の証明能力は変わらないという Harrington の定理がある([田 2] 参照)．さらに，WKL_0 は(したがって RCA_0 も) 1 階算術 PRA の Π_2^0-保存的拡大になるという H. Friedman の定理もある([田 2] 参照)．ここで，PRA は Primitive Recursive Arithmetic の頭文字をとったもので，すべての原始再帰的関数(の定義)に対して関数記号をもち，それらの定義式を公理にもつ体系で，Hilbert の「有限の立場」の形式化といわれている．WKL_0 と PRA は同じ Π_2^0 定理をもっているので，WKL_0 は無矛盾性に関して「有限の立場」と同程度の透明性をもっているといえる．

付録　Hilbert のプログラム

1920 年代，Hilbert は，数学の非構成的な手法を攻撃してきた直観主義者 Brouwer に対抗すべく，また自らが世に問うたいくつかの難題(例. 連続体仮説)に取り組むべく，記号の世界で数学の模型を作り，それを分析することによって数学の縺れた糸を解くという方法(「証明論」)を提案した．数学全体が議論できるような大きな体系 T (例. 集合論 ZF + AC)に対しても，その証明可能性はある文字列が別の文字列に変形できるかどうかの問題として考えられる．特に，何の存在も主張しない Π_1^0 文(例. Fermat の定理： $\forall n > 2\ \forall x, y, z > 0\ (x^n + y^n \neq z^n)$) に対しては，$T$ での証明があるなら，その証明を眺めれば「有限の立場」での証明が抽出できるはずだから，逆に Π_1^0 の難題は最初から記号処理の問題として解けばよいと考えた．

大きな体系 T に対し，その体系の記号操作ができる程度の小さな体系(例. PRA)を t として，次の図式 HP を **Hilbert の(還元主義)プログラム**(Hilbert's (reductionism) program)と呼ぶ：

$$\text{任意の } \Pi_1^0 \text{ 文 } \pi \text{ に対し，} T \vdash \pi \text{ ならば } t \vdash \pi.$$

以下では，T も t も少なくとも PRA を含むとしておく．また，$\mathrm{Con}(T)$ を，T の無矛盾性を表す Π_1^0 文とする．

定理 8.3.11　任意の Π_1^0 命題 φ に対し，$T \vdash \varphi$ ならば $t + \mathrm{Con}(T) \vdash \varphi$.

証明 $\varphi \equiv \forall n\, \theta(n)$ ($\theta(n)$ は Σ^0_0) とし，$T \vdash \varphi$ を仮定する．$T \vdash \varphi$ から $t \vdash$ "$T \vdash \varphi$" は容易にいえる．他方，$t \vdash \neg\theta(n) \rightarrow$ "$T \vdash \neg\theta(n)$"，すなわち $t \vdash \neg\theta(n) \rightarrow$ "$T \vdash \neg\varphi$" なので，$t \vdash \neg\theta(n) \rightarrow \neg\mathrm{Con}(T)$．したがって，$t + \mathrm{Con}(T) \vdash \theta(n)$ だから，$t + \mathrm{Con}(T) \vdash \varphi$ となる． □

この定理により，$t \vdash \mathrm{Con}(T)$ ならば，HP がいえることがわかる．しかし，Gödel の不完全性定理により，T においても $\mathrm{Con}(T)$ は証明できないし，また t においては $\mathrm{Con}(t)$ が証明できないことがわかった．他方，上でも述べたように，$T = \mathrm{WKL}_0$, $t = \mathrm{PRA}$ に対しては HP が成り立っており，WKL_0 で展開される数学の豊かさを見るとき，「Hilbert のプログラム」は部分的に実現されたと見ることができる．このような見解に異義を唱える人がいたとしても，ある Π^0_1 命題が弱 König の補題のような非構成的な仮定を用いて証明されるとき，その非構成的な部分を消去して構成的な証明に書き換える手続きがあるという結論自体の重要性は疑えないであろう．

最後に，筆者が予想していた問題が最近証明されたので，その定理を述べて，本書の締めとしよう (文献 [山崎])．

定理 8.3.12 (Simpson-Tanaka-Yamazaki) 任意の Π^1_0 論理式 $\varphi(X, Y)$ に対し，$\mathrm{WKL}_0 \vdash \forall X\, \exists!\, Y\, \varphi(X, Y)$ ならば $\mathrm{RCA}_0 \vdash \forall X\, \exists!\, Y\, \varphi(X, Y)$．ここで，$\exists!\, Y$ は "ただ 1 つ Y が存在すること" を意味する．

問題の解答とヒント

[**1.1**] $\mathbf{a}\bullet\mathbf{e} = \mathbf{a}\bullet(\mathbf{a}^{-1}\bullet\mathbf{a}) = (\mathbf{a}\bullet\mathbf{a}^{-1})\bullet\mathbf{a} = \mathbf{e}\bullet\mathbf{a} = \mathbf{a}$.

[**1.2**] G を集合 $\{0,1\}$ とし，$\bullet$ を $x\bullet y = y$ で定義する．そして，$\mathbf{e}=0$, $x^{-1}=0$ とすれば，Gp′ のモデルになるが，G_3 は満たさない．

[**1.3**] $s = xx^{-1}$ とおき，例 1 で与えられた $ss = s$ の証明木を P_4 とする．Gp における $(s^{-1}s)s = s^{-1}(ss)$, $s = (s^{-1}s)s$, $s = s^{-1}s$ の証明木 P_5, P_6, P_7 を，それぞれ以下のように与える．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(xy)z = x(yz)}{(s^{-1}y)z = s^{-1}(yz)}\,(\mathrm{sub})}{(s^{-1}s)z = s^{-1}(sz)}\,(\mathrm{sub})}{(s^{-1}s)s = s^{-1}(ss)}\,(\mathrm{sub}),\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{ex = x}{es = s}\,(\mathrm{sub})}{s = es}\,(\mathrm{sym}) \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{x^{-1}x = e}{s^{-1}s = e}\,(\mathrm{sub})}{e = s^{-1}s}\,(\mathrm{sym}) \quad s = s}{es = (s^{-1}s)s}\,(\mathrm{comp})}{s = (s^{-1}s)s}\,(\mathrm{trans}),$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P_6}{s = (s^{-1}s)s} \quad \dfrac{P_5}{(s^{-1}s)s = s^{-1}(ss)}}{s = s^{-1}(ss)}\,(\mathrm{trans}) \quad \dfrac{s^{-1} = s^{-1} \quad \dfrac{P_4}{ss = s}}{s^{-1}(ss) = s^{-1}s}\,(\mathrm{comp})}{s = s^{-1}s}\,(\mathrm{trans}).$$

求める証明木は

$$\dfrac{\dfrac{P_7}{s = s^{-1}s} \quad \dfrac{x^{-1}x = e}{s^{-1}s = e}\,(\mathrm{sub})}{s = e}\,(\mathrm{trans})$$

である．

[**1.4**] 問題 1.3 の解の証明木を P_8 とする．$t = x^{-1}x$ とおいて，$xt = sx$, $sx = x$ の証明木(それぞれ P_9, P_{10} とする)を与える．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(xy)z = x(yz)}{x(yz) = (xy)z}\,(\mathrm{sym})}{x(yx) = (xy)x}\,(\mathrm{sub})}{xt = sx}\,(\mathrm{sub}),\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{P_8}{s = e} \quad x = x}{sx = ex}\,(\mathrm{comp}) \quad ex = x}{sx = x}\,(\mathrm{trans}).$$

求める証明木は，

$$\dfrac{\dfrac{x = x \quad \dfrac{t = e}{e = t}\,(\mathrm{sym})}{xe = xt}\,(\mathrm{comp}) \quad \dfrac{\dfrac{P_9}{xt = sx} \quad \dfrac{P_{10}}{sx = x}}{xt = x}\,(\mathrm{trans})}{xe = x}\,(\mathrm{trans})$$

である．

[1.5]　準同型 $\phi:\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ が全単射なら，$\psi=\phi^{-1}$ が定義されて，これは $\mathfrak{B}$ から $\mathfrak{A}$ への準同型になり，$\psi\circ\varphi$ と $\phi\circ\psi$ は恒等写像である．逆に，$\psi\circ\phi$ と $\phi\circ\psi$ が恒等写像なら，ψ と ϕ はともに全単射になるので，準同型 $\phi:\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ は同型である．

[1.6]　$a_1\equiv_H b_1$ かつ $a_2\equiv_H b_2$ として，$a_1^{-1}\equiv_H b_1^{-1}$ と $a_1a_2\equiv_H b_1b_2$ を示せばよい．$\mathfrak{H}$ が正規部分群なので，$ab^{-1}\in|\mathfrak{H}| \Leftrightarrow b^{-1}a\in|\mathfrak{H}|$ となることに注意すれば前者は簡単にいえる．後者については，$a_2b_2^{-1}b_1^{-1}a_1\in|\mathfrak{H}|$ より $(a_1a_2)(b_1b_2)^{-1}=a_1(a_2b_2^{-1}b_1^{-1}a_1)a_1^{-1}$ $\in|\mathfrak{H}|$ である．

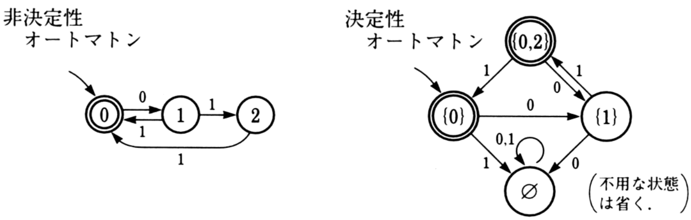
[1.7]　有限集合 $X_1=\{x\}$, $X_2=\{x_1,x_2\}$ で生成される自由 Mod(E)-代数 $\mathcal{T}(X_1)/E$, $\mathcal{T}(X_2)/E$ について考える．それぞれの自由性から，$x\mapsto h(x_1,x_2)$ の拡張となる準同型 $\phi:\mathcal{T}(X_1)/E\to\mathcal{T}(X_2)/E$, そして $x_1\mapsto g_1(x)$ かつ $x_2\mapsto g_2(x)$ の拡張となる準同型 $\psi:\mathcal{T}(X_2)/E\to\mathcal{T}(X_1)/E$ が存在する．ここで，

$$\psi\circ\phi(x)=\psi(h(x_1,x_2))=h(\psi(x_1),\psi(x_2))=h(g_1(x),g_2(x))=x$$

だから，$\psi\circ\phi$ は $\mathcal{T}(X_1)/E$ から自分自身への恒等写像と一致する．同様に，$\phi\circ\psi$ も恒等写像となり，$\phi=\psi^{-1}$ は同型である．あとは，この議論を $X_1=\{x\}$ と $X_n=\{x_1,\cdots,x_n\}$ の関係に拡張すればよい．例えば，$n=3$ のときは，$x\mapsto h(h(x_1,x_2),x_3)$ の拡張となる準同型が同型になることをいう．

[1.8]　有理数体 $\mathfrak{Q}=(\mathbf{Q},+,\cdot,0,1)$ の直積 $\mathfrak{Q}\times\mathfrak{Q}$ は整域でなく（$\because$　$(0,1)\cdot(1,0)=(0,0)$），体でもないから，体の全体は直積で閉じていない．よって，Birkhoff の等式クラス定理から，体は等式クラスにならない．

[2.1]　一例を示す．



[2.2]　L を受理する決定性オートマトン $\mathcal{M}=(Q,\Omega,\delta,q_0,F)$ に対し，L^t を受理する非決定性オートマトン $\mathcal{M}'=(Q',\Omega,\delta',Q_0',F')$ を次のように定義する．$Q'=Q$, $\delta'(q,a)=\{p:\delta(p,a)=q\}$, $Q_0'=F$, $F'=\{q_0\}$.

[2.3]　x^y の原始再帰的定義：$x^0=1$, $x^{y+1}=x^y\cdot x$. $x!$ の原始再帰的定義：$0!=1$, $(x+1)!=x!\cdot(x+1)$. $\max\{x,y\}=x+(y\dot{-}x)$. $\min\{x,y\}=x\dot{-}(x\dot{-}y)$.

[**2.4**]　$F(\vec{x}, 0) = 0$, $F(\vec{x}, z+1) = F(\vec{x}, z) + f(\vec{x}, z)$．$G(\vec{x}, 0) = 1$, $G(\vec{x}, z+1) = G(\vec{x}, z) \cdot f(\vec{x}, z)$．

[**2.5**]　$\chi_{\forall y<zA} = \prod_{y<z} \chi_A$,　$\chi_{\exists y<zA} = \sum_{y<z} \chi_A$.

[**2.6**]　まず，原始再帰的関係 par(x) を次を表すものと定義する： x は空でない記号列のコードで，その列に左カッコ“(”と右カッコ“)”が同数個出現する．そして，原始再帰的関係 qterm(x) を次を表すものと定義する： x は $(s+t)$ の形の記号列のコードで，par(⌜s⌝) $\wedge$ par(⌜t⌝) となる．このとき，$l(x) =$⌜s⌝, $r(x) =$⌜t⌝ となる原始再帰的関数 $l(x)$, $r(x)$ も存在する(s, t がただ1つに定まらないときは，最小の s を選ぶ)．

以上の準備のもとで，次の原始再帰的関係 term(x, n) (その特性関数と同一視する)を定義する．term$(x, 0) = 1$ ($x =$⌜0⌝,⌜1⌝ のとき)，$= 0$ (それ以外の x)．そして，

$$\mathrm{term}(x, n+1) = \begin{cases} 1 & (x = \ulcorner 0 \urcorner,\ \ulcorner 1 \urcorner \text{ のとき}), \\ \mathrm{term}(l(x), n) \wedge \mathrm{term}(r(x), n) & (\mathrm{qterm}(x) \text{ のとき}), \\ 0 & (\text{どちらでもないとき}). \end{cases}$$

最後に，Term$(x) \leftrightarrow \exists n <$ leng(x) term(x, n) とおけばよい．

[**3.1**]　$R(x)$ を $y = x$ とすると，$x \neq y$, $y = x$, $y \neq y$ が公理になるので，等号公理 (i) $y = y$ と (cut) によって，(ii) $x \neq y$, $y = x$ を得る．次に，$R(x)$ を $x = z$ とすると，$x \neq y, x = z, y \neq z$ が公理になるので，(iii) $x \neq y$, $y \neq z, x = z$ を得る．

[**3.2**]　$T_1 \cup T_2$ が矛盾していると仮定する．すると，T_1 の有限部分集合 $\{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n\}$ が存在して，これと T_2 からも矛盾が出る．いま，$\sigma = (\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \cdots \wedge \sigma_n)$ とおけば，$T_2 \cup \{\sigma\}$ も矛盾するので，$T_2 \vdash \neg\sigma$ である．他方，$T_1 \vdash \sigma$ は，σ の定義から明らか．

[**3.3**]　(1)　必要性は明らか．逆に，任意の有限生成部分群が順序付けられるような群 $\mathfrak{G}$ を考える．いま，$T = \mathrm{Diag}(\mathfrak{G}) \cup \{$順序群の公理$\}$ とおく．T の任意有限部分は，$\mathfrak{G}$ の有限生成部分群をモデルにもつので無矛盾である．よって，T 自身もモデルをもち，それは $\mathfrak{G}$ を部分群に含む．T のモデルの上には順序が定義されているから，それを $\mathfrak{G}$ に制限すれば，$\mathfrak{G}$ 上の順序となる．

(2)　$\mathfrak{G}$ を順序加群とする．0 でない任意の元 $a \in G$ は，$a < 0$ または $a > 0$ を満たすので，任意の $n > 0$ に対して，$na < 0$ または $na > 0$ となり，$na \neq 0$ となる．よって，$\mathfrak{G}$ はねじれのない群である．逆に，$\mathfrak{G}$ をねじれのない加群とする．このとき，$\mathfrak{G}$ の任意の有限生成部分群 $\mathfrak{G}'$ は，$\mathbb{Z}$ (順序加群)の直積 $\bigoplus_{i \le m} \mathbb{Z}$ と同型になる．$\bigoplus_{i \le m} \mathbb{Z}$ は，$\mathbb{Z}$ の順序 $<$ による辞書式順序で順序付けられるから，$\mathfrak{G}'$ にも順序が入る．よって，(1) より $\mathfrak{G}$ も順序付けられる．

[**3.4**] まず，$\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ 上の同値関係 $=_Z$ を $(k, l) =_Z (m, n) \leftrightarrow k + n = l + m$ によって定義する．ペア (m, n) によって整数 $m - n$ を表したいのだが，その表現を一意にするため，$=_Z$ の各同値類からコード最小のペア (m, n) を選び，それを整数と考える．したがって，$U(x)$ は，“コード x のペア (m, n) が属する同値類において，どのペアのコードも x 以上である”ことを記述すればよい．$\mathfrak{Z}$ 上の演算は，$(k, l) + (m, n) =_Z (k + m, l + n)$，$(k, l)\cdot(m, n) =_Z (km + ln, kn + lm)$ で定める．

[**3.5**] ZF において，有限順序数を表す述語として $U(x)$ を定義し，算術の演算は順序数の演算と同じものとする．この翻訳が PA の翻訳になることを示すには，PA の帰納法の翻訳結果が ZF で証明できればよい．PA の帰納法を翻訳すると，ZF の論理式に対する有限順序数上の帰納法になり，これは ZF で証明できる．

逆を示すには，まず二進コードを使って，自然数の有限集合と自然数を 1 対 1 に対応させる関数を定義する．つまり，自然数 n を 2 進数で表して $k + 1$ 桁目が 1 のとき，コード n の集合に k が属するものとして，$k \in n$ と書く．さらに，$k \in n$ を，コード k の集合がコード n の集合に属するというように集合上の関係に解釈し直せば，この翻訳によって無限公理以外の ZF 公理は PA で証明できるものとなる．特に，置換公理が採集原理に翻訳されることに注意されたい(6.2 節を参照)．

[**4.1**] $\phi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ が埋め込みであれば，ϕ による $\mathfrak{A}$ の像は $\mathfrak{A}$ と同型になり，$\mathfrak{B}_{\phi(A)}$ は $\mathrm{Diag}(\mathfrak{A})$ に含まれる関係をすべて満たす．逆に，$\mathfrak{B}_{\phi(A)}$ が $\mathrm{Diag}(\mathfrak{A})$ のモデルであるなら，ϕ が埋め込みであるための各条件を満たすことが確かめられる．

[**4.2**] $\mathfrak{Q}_< \not\cong \mathfrak{R}_<$, $\mathfrak{Q}_< \subseteq \mathfrak{R}_<$, $\mathfrak{Q}_< \equiv \mathfrak{R}_<$, $\mathfrak{Q}_< \prec \mathfrak{R}_<$.

1 番目の関係は両者の濃度の違いから導け，2 番目は明らかである．3 番目は，4 番目からしたがう．そこで，4 番目の証明の考え方を示そう．これは「最大最小をもたない稠密線形順序の理論 DLO は量化記号を消去できる」という古典定理(Langford)から導かれる．量化記号をもたない文(Q の定数を含んでよい)の真偽は，$\mathfrak{Q}_<, \mathfrak{R}_<$ において同じであることは明らかである．

量化記号消去について詳しくは 5 章と 7 章で学ぶが，論理式の変形操作によって，$\exists x\ (\varphi_1(x) \wedge \cdots \wedge \varphi_m(x))$（各 φ_i は原子式）の形の論理式から“∃”をはずせれば，すべての論理式に対して量化記号を含まない同値な論理式を見つけることができる．例えば，$\exists x\ (x < y \wedge y < z)$ のような論理式は DLO で $y < z$ と同値になり，$\exists x\ (x = y \wedge y < z)$ のようなものは $y < z$ と同値になっている．詳細は，読者に任せる．

[**4.3**] まず，$|\mathfrak{A}| = \{a_1, \cdots, a_n\}$ とする．このとき，

$$\mathfrak{A} \models \exists x_1 \exists x_2 \cdots \exists x_n (\bigwedge_{1\leq i,j\leq n, i\neq j} (x_i \neq x_j)) \wedge \neg(\exists x_1 \exists x_2 \cdots \exists x_{n+1} (\bigwedge_{1\leq i,j\leq n+1, i\neq j} (x_i \neq x_j)))$$

である．$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ だから，$\mathfrak{B}$ でも上の式が成り立つ．よって，$\mathfrak{B}$ も有限であり，丁度 n 個の要素をもつ．

$B' = \{ (b_{i_1}, b_{i_2}, \cdots, b_{i_n}) \in B^n : \mathfrak{A}_A \models \varphi(a_1, \cdots, a_n)$ となる任意の論理式 φ に対して $\mathfrak{B}_B \models \varphi(b_{i_1}, \cdots, b_{i_n}) \}$ とおくと，$B' \neq \emptyset$ である．実際，$B' = \emptyset$ とすると，各 $\vec{b} \in B^n$ に対し $\mathfrak{A}_A \models \varphi_{\vec{b}}(a_1, \cdots, a_n) \wedge \mathfrak{B}_B \models \neg\varphi_{\vec{b}}(\vec{b})$ となる論理式 $\varphi_{\vec{b}}$ が存在することになるが，そうすると $\mathfrak{A} \models \exists \vec{x} \bigwedge_{\vec{b} \in B^n} \varphi_{\vec{b}}(\vec{x})$ かつ $\mathfrak{B} \models \forall \vec{x} \bigvee_{\vec{b} \in B^n} \neg\varphi_{\vec{b}}(\vec{x})$ となって，$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ に矛盾する．

$(b_1, b_2, \cdots, b_n) \in B'$ を任意に選ぶ．任意の論理式 φ に対して，$\mathfrak{A}_A \models \varphi(a_1, \cdots, a_n) \Rightarrow \mathfrak{B}_B \models \varphi(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ となることは B' の定義より明らか．逆向きも，$\mathfrak{B}_B \models \varphi(\vec{b}) \Rightarrow \mathfrak{B}_B \not\models \neg\varphi(\vec{b}) \Rightarrow \mathfrak{A}_A \not\models \neg\varphi(\vec{a}) \Rightarrow \mathfrak{A}_A \models \varphi(\vec{a})$ からいえる．最後に $f(a_i) = b_i$ で A から B への写像を定義すると，これが $\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}$ の同型になることは容易にわかる．

[4.4] (1) (i) → (ii)．T のモデル $\mathfrak{A}$ の最小部分構造を $\mathfrak{B}$ とすると，$|\mathfrak{B}|$ は，変数を含まない項 t の解釈 $t^{\mathfrak{A}}$ を集めたものである．いま，$\mathfrak{A} \models \exists x \varphi(x, t_1, \cdots, t_m)$ とすると，T の弱ヘンキン性から，項 t が存在して，$\mathfrak{A} \models \varphi(t, t_1, \cdots, t_m)$ となる．Tarski-Vaught の判定法から，$\mathfrak{B} < \mathfrak{A}$.

(1) (ii) → (i)．T を弱ヘンキン性をもたない理論とする．このとき，論理式 $\varphi(x)$ が存在し，$T \cup \{ \exists x \varphi(x)\} \cup \{\neg\varphi(t) : t$ は変数を含まない項$\}$ が無矛盾であることがいえる(コンパクト性)．このモデルを $\mathfrak{A}$ とし，その最小部分構造を $\mathfrak{B}$ とする．仮定より $\mathfrak{B} < \mathfrak{A}$ だから，$\mathfrak{B} \models \exists x \varphi(x)$．すると，$\mathfrak{B}$ の最小性から，項 t が存在して $\mathfrak{B} \models \varphi(t)$．再び $\mathfrak{B} < \mathfrak{A}$ より，$\mathfrak{A} \models \varphi(t)$ となって矛盾である．

(2) も (1) と類似の方法で証明できる．

[4.5] $\mathcal{K}$ を高々可算な線形順序構造全体とすると，それは部分構造に関して閉じているが，Mod(T) で表せないことは Löwenheim-Skolem-Tarski の定理により明らか．

[4.6] φ を任意の論理式とする．まず，それに含まれる自由変数を新しい定数に置き換え，文として扱ってよい．なぜなら，その文と同値な文が見つかれば，それらに含まれる新定数をもとの変数に戻したもの同士も同値になるからである．さらに，$T \cup \{\varphi\}$ は無矛盾であると仮定してよい．そうでなければ，矛盾を表す任意の文が φ と同値である．

$T' = \{\sigma : \sigma$ は $\forall$ 文で，かつ $T \cup \{\varphi\} \vdash \sigma\}$ とおく．いま，$\mathfrak{A}$ を $T \cup T'$ の任意のモデルとし，$D = \mathrm{Diag}(\mathfrak{A})$ とおく．$D \cup T \cup \{\varphi\}$ がモデル $\mathfrak{B}_A$ をもつことは，Łoś-Tarski の定理の証明と全く同じようにいえる．モデル完全性により $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}_A$ だから，$\mathfrak{A} \models \varphi$ と

なる．$\mathfrak{A}$は$T \cup T'$の任意のモデルだったから，完全性定理により$T \cup T' \vdash \varphi$である．したがって，T'の有限部分集合$\{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n\}$が存在して，$T \vdash (\sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_n) \to \varphi$となる．最後に，$(\sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_n)$は，それと同値な$\forall$文$\sigma$に容易に変形できるので，$T \vdash \sigma \leftrightarrow \varphi$を得る．

[**4.7**]　(1) フィルターの条件(1), (2)を満たさない．(2) フィルターの条件(1), (3)を満たさない．　(3), (4) フィルターの3条件を満たす．

[**4.8**]　$\mathcal{F}$を任意の体とし，以下$\mathcal{F}$の各元を表す定数をもつ言語を考える．(1次以上の)多項式$P \in \mathcal{F}[X]$に対し$\mathcal{F}_P$をPの分解体とし，さらに(1次以上の)各$Q \in \mathcal{F}[X]$に対して，$J_Q = \{P \in \mathcal{F}[X] : Q$は$\mathcal{F}_P$の上で1次式の積に分解できる$\}$とおく．すると，$\{J_Q : Q \in \mathcal{F}[X]$かつ$Q$は定数でない$\}$は有限交叉性をもつ($\because$ $Q_1 \cdots Q_n \in J_{Q_1} \cap \cdots \cap J_{Q_n}$)．したがって，これは超フィルター$\mathcal{U}$に拡大できる．

いま，超積$\prod \mathcal{F}_P/\mathcal{U}$を考える．すべての$\mathcal{F}_P$で成り立つ文は超積$\prod \mathcal{F}_P/\mathcal{U}$でも成り立つから，この超積は体であり，$\mathcal{F}$の拡大体になっている．また，任意の(1次以上の)多項式$Q \in \mathcal{F}[X]$に対し，“Qが$\mathcal{F}_P$の上で1次式の積に分解できる”という文は，$J_Q \in \mathcal{U}$に属するすべてのPで成り立つから，$\prod \mathcal{F}_P/\mathcal{U}$でも成り立つ．よって，$\prod \mathcal{F}_P/\mathcal{U}$は代数的閉体である．

最後に$\prod \mathcal{F}_P/\mathcal{U}$の元で，ある$P \in \mathcal{F}[X]$の根になるものだけを集めて，$\overline{\mathcal{F}}$とおく．$\overline{\mathcal{F}}$が，$\mathcal{F}$の代数的拡大であることは明らか．いま，$\overline{\mathcal{F}}[X]$の多項式で，$\overline{\mathcal{F}}$に根をもたないものがあったとしよう．すると，その根は$\mathcal{F}$の多項式の根として表せるはずだから(“代数的拡大”は推移的)，$\overline{\mathcal{F}}$に属することになって矛盾である．したがって，$\overline{\mathcal{F}}$は$\mathcal{F}$の代数的閉包である．

[**4.9**]　(1)　ϵ, δを無限小とする．標準実数$b < 2$を任意にとる．無限小の定義から$-b/2 < \epsilon,\ \delta < b/2$であり，順序体の性質より$-b < \epsilon + \delta,\ \epsilon \cdot \delta < b$となる．よって，$\epsilon + \delta,\ \epsilon \cdot \delta$は無限小．

(2)　aが無限大$\Leftrightarrow \forall b \in \mathbb{R}\ b < |a| \Leftrightarrow \forall b > 0\,(\in \mathbb{R})\ |1/a| < 1/b \Leftrightarrow \forall b > 0\,(\in \mathbb{R})\ |1/a| < b \Leftrightarrow 1/a$は無限小．

[**5.1**]　(1)　まず$\mathrm{Q} \vdash 1 \neq 0$である．なぜなら，$1 = 0$とすれば，$0 + 1 = 0 + 0$となるが，A 1より$0 + 1 \neq 0$，A 3より$0 + 0 = 0$だから，矛盾である．そこで，公理A 10を適用して$y + 1 = 1$となるyがある．すると，$0 + 1 = 0 + (y + 1) = (0 + y) + 1$より$0 = 0 + y$となり，もし$y \neq 0$であれば再度公理A 10を用いて矛盾が導かれる．

(2)　各自然数$n \geq 1$に対し，2種類の数$\tilde{n},\ 0 + \tilde{n}$を用意する．さらに，0は特別な元として，後者の仲間に加える．和積演算に関しては，$\tilde{m} + \tilde{n} = \tilde{m} + (0 + \tilde{n}) = \widetilde{m + n}$, (0

$+\tilde{m})+\tilde{n}=(0+\tilde{m})+(0+\tilde{n})=0+(\widetilde{m+n})$ のように演算の左側の項の種類が演算結果の種類を決めるものとする．但し，$\tilde{n}\cdot 0=0$ は例外である．このように定義された構造は，Q-A 10 を満たし，$0+1=1$ を満たさない．

(3) ペアノ算術 PA の超準モデルを 1 つ用意する．その超準部分だけを (2) と同様の方法で，2 種類の数に分けた構造を考えれば，Q を満たし，$\forall x\,(0+x=x)$ を満たさないものになる．

[5.2] PA^- の公理は，差の公理以外はすべて開論理式で表され，単純な帰納法で証明できる．差の公理は，$\mathrm{Q}_<$ の公理でもある．

[5.3] (1) $\mathrm{I}\Sigma_1\Rightarrow\mathrm{I}\Pi_1$ のみを示す．その逆や Σ_n への一般化も殆ど同様である．$\varphi(x)$ を Π_1 論理式として，$\varphi(0)\wedge\forall x\,(\varphi(x)\to\varphi(x+1))$ と仮定する．そして，$\neg\varphi(c)$ として矛盾を導く．基本的な戦略としては，Σ_1 論理式 $\neg\varphi(c-x)$ についての帰納法を用いる．これは，$\neg\varphi(c-0)$ で成り立ち，$\neg\varphi(c-x)\to\neg\varphi(c-(x+1))$ も $\varphi(x)$ についての仮定からいえるので，$\neg\varphi(0)$ となって矛盾する．厳密には，次のような論理式を用いて証明すればよい．$\psi(x)=\exists y\leq c\,(x+y=c\wedge\neg\varphi(y))\vee c<x$．なお，$\varphi(x)$ に含まれる x 以外の自由変数も一度定数に置き換えて議論する必要がある．

(2) $\mathrm{B}\Sigma_2\Rightarrow\mathrm{I}\Sigma_1$ のみを示す．$\varphi(x)\equiv\exists y\,\theta(x,y)$ を任意の Σ_1 論理式とし，$\theta(x,y)$ は Σ_0 とする．いま，$\varphi(0)$ かつ $\forall x(\varphi(x)\to\varphi(x+1))$ を仮定する．すると，u を任意の定数として，

$$\forall x<u(\exists y\theta(x,y)\to\exists z\,\theta(x+1,z)),$$
$$\forall x<u\ \exists z\ \forall y(\theta(x,y)\to\theta(x+1,z)),$$
$$\exists v\ \forall x<u\ \exists z<v\ \forall y(\theta(x,y)\to\theta(x+1,z)).$$

上の論理式と $\exists w<v\,\theta(0,w)$ を同時に満たす v を選んで，$\exists y<v\,\theta(x,y)\vee u\leq x$ を x に関する Σ_0 帰納法で証明する．すなわち，$\forall x<u\ \exists y<v\,\theta(x,y)$ となるが，u は任意だから $\forall x\,\varphi(x)$ を得る．

[5.4] S を無矛盾な算術の公理系とする．第二不完全性定理により，$S\nvdash\mathrm{Con}(S)$．よって，$T=S+\neg\mathrm{Con}(S)$ とおくと，T も無矛盾．T は S より大きな体系だから，$\mathrm{Con}(T)\to\mathrm{Con}(S)$，すなわち $\neg\mathrm{Con}(S)\to\neg\mathrm{Con}(T)$．よって $T\vdash\neg\mathrm{Con}(T)$．

[5.5] 補題 5.4.4 の証明において，新しい関係記号に関する追加公理をその論理式の構成による帰納的定義に改める．例えば，

$$\forall x_1\cdots\forall x_n\,(R_{\varphi\wedge\psi}(x_1,\cdots,x_n)\leftrightarrow R_\varphi(x_1,\cdots,x_n)\wedge R_\psi(x_1,\cdots,x_n))$$

とする．すると，すべての追加公理は $\forall\exists$ 論理式になる．また，T 固有の公理は新しい関係記号で表現すればよい．

[**5.6**] 定理 5.4.10，系 5.4.11 と類似した証明が可能である．

[**5.7**] すべて帰納法で容易に証明できる．

[**6.1**] $\mathbb{N}+\mathbb{Z}\cdot\mathbb{R}$ の順序型のモデルがあるとして，$\{[na] : n \in \omega\}$ の上限を $[b]$ とおけば，$[b-a]$ の存在から矛盾が導ける．

[**6.2**] $\mathfrak{A}$ において，採集原理が成り立つことを次のように示す．(問題 5.3 を参照)

$$\mathfrak{A} \models \forall x < t\, \exists \vec{y}\, \varphi(x, \vec{y}) \ \Rightarrow\ \exists u \in B - A\, \forall x < t\, \exists \vec{y} < u\, \mathfrak{B}_B \models \varphi(x, \vec{y})$$
$$\Rightarrow \mathfrak{B} \models \exists u\, \forall x < t\, \exists \vec{y} < u\, \varphi(x, \vec{y}) \ \Rightarrow\ \mathfrak{A} \models \exists u\, \forall x < t\, \exists \vec{y} < u\, \varphi(x, \vec{y}).$$

[**6.3**] $|\mathfrak{A}| = \{a_1, \cdots, a_n\}$ とし，各 j に対して，$A_j = \{a \in A : \forall i < j\, \mathfrak{A}_A \models \varphi_i(a, a_1, \cdots, a_n)\}$ を考える．A_j は j について単調減少するが，再帰的飽和性の前提(有限充足性)から，どの j についても $A_j \neq \emptyset$ なので，$\bigcap_j A_j \neq \emptyset$ となる．$\bigcap_j A_j$ の元 a は，$\{\varphi_i(x, a_1, \cdots, a_n)\}$ を実現する．

[**6.4**] (1) Tarski–Vaught の判定法を用いればよい．$\mathfrak{A}_{\{a\}} \models \exists x\, \varphi(x, a)$ のとき，論理式 $\varphi(x, a) \wedge \forall y < x\, \neg\varphi(x, a)$ は，$\mathfrak{A}_{\{a,b\}} \models \varphi(b, a)$ となる最小の b を定義する．

(2) $\Phi(x, a)$ が再帰的で有限充足可能であることは明らか．また，$\Phi(x, a)$ は，$\mathrm{K}(\mathfrak{A}; a)$ の元の定義式 $\varphi(v, a)$ で構成されるものもすべて含むので，$\mathrm{K}(\mathfrak{A}; a)$ で実現できない．

[**6.5**] 掛け算を含まない論理式はプレスバーガー算術の論理式であり，それは量化記号消去法によって，簡単な Σ_0 式で表せる．したがって，Σ_1-再帰的飽和性があれば，掛け算を含まない任意の論理式についての再帰的飽和性が得られる．

[**7.1**] $\mathrm{RCOF} \vdash \varphi \Leftarrow \mathrm{OF} \vdash \varphi$ は明らか．逆をいうために，$\mathrm{OF} \nvdash \varphi$ とする．開論理式 φ の全称閉包を $\forall \vec{x}\, \varphi$ として，$\mathrm{OF} + \{\exists \vec{x}\, \neg\varphi\}$ は無矛盾だから，モデル $\mathfrak{K}$ をもつ．定理 7.2.3 により，$\mathfrak{K}$ を埋め込む実閉順序体 $\mathfrak{L}$ を考えると，$\{\exists \vec{x}\, \neg\varphi\}$ は $\exists$ 文だから，$\mathfrak{L}$ でも成り立つ．よって，$\mathrm{RCOF} + \{\exists \vec{x}\, \neg\varphi\}$ も無矛盾であるから，$\mathrm{RCOF} \nvdash \varphi$ となる．

[**7.2**] 系 7.3.13 と同様に証明できる．

以上

文 献 案 内

最初に，本書全般を通じての思想や背景について関心を持たれた方には，[倉田], [竹内], [田 4], [田 5], [Fef] などを併せて読んでいただくことを薦めたい．もっと広い観点からは，[高木] が優れた入門書である．その他，本書全体に関する参考資料として，[Bar], [HiB] がある．記号論理に全く予備知識がない方は，[前原] に目を通しておくとよいだろう．

第 1 章の内容は，普遍代数学 (universal algebra) という分野の話題であるが，この分野の教科書としては [Coh] や [BuS] が読みやすい．他に，[BaM] や [BaN] にも普遍代数学の章が設けられている．

第 2 章は，計算論ないし再帰理論の入門であり，この分野の定評ある教科書には [Rog] と [HoU] がある．日本語にも関連の教科書がたくさんあるが，とくに [笠戸] と [篠田] は本章の続きとして読めると思う．尚，本書で扱えなかった重要事項の 1 つである Hilbert の第 10 問題については，[篠田], [田 3], [AdZ], [Smo] を参照していただきたい．

第 3 章では，述語論理の基本を扱ったが，もう少し丁寧な説明がほしいという方には [vDa], [EFT], [End] が薦められる．[Bar] の第 1 章も読みやすい．また，[田 1] では，本書と異なるヒルベルト流の公理系を扱っているので，比べて読んでいただきたい．

第 4 章は，古典的なモデル論の成果をまとめたものだが，この分野の教科書としては [ChK], [Hod], [Mon] が有名である．また，[Doe] も読みやすい．新しい話題を含むものには，[坪井], [Poi], [HPS] などがある．また，超フィルターや選択公理に関する話については，[田尚] が秀逸である．超準解析については，[AFHL] の最初の部分が読みやすい．

第 5 章は，自然数を扱う形式体系の話である．[HaP] は，内容が充実しており，この辺りを研究するためには必携である．[田 1] は，第二不完全性定理の証明を含めて，不完全性定理の周辺の話題を幅広く扱っている．演算を制限した算術の体系

については，[End] がよく整理されている．

第6章は，自然数論の超準モデルの話である．ペアノ算術のモデルの本としては，[Kay] が評判がいい．しかし，この本は必要なところだけを拾い読みするのが難しく，またペアノ算術の部分体系については殆ど触れていないので，研究資料としては使いにくいところもある．再帰的飽和や麗質モデルに関しては，[BaS] が基本論文である．紙数の関係で省略せざるを得なかった2階算術のモデルの話は，[Sim] や [田2] を参照．自己埋め込み定理の2階算術版も [Tan] にある．

第7章で扱った実閉体の理論については，[vdW], [Lan] や [Jac] など標準的な代数学の教科書でも扱っているが，基礎論側からの解説としては [竹内] を薦める．また，この章を読むのに代数学の一般知識が必要な場合は，[森田] を参照していただくのがよい．ロジック特にモデル論の多くの教科書([AdZ], [Hod], [KrK], [Poi], [Sho] など)ではそれなりに Tarski の定理にページを割いているが，どれも説明が簡略化されすぎている感じなので，本書の後でそれらをご覧になるといいと思う．他に，もう少し新しい資料として，[ArB], [HPS] や [Mis] がある．

第8章は，実数論としての2階算術を扱ったものである．2階算術の上でさらに高度の解析学や代数学を展開する話は，[Sim] に詳しい．代数学の基本定理が RCA_0 で証明できるということは，[Sim] の中でも言及されているが，印刷された証明が存在しなかったので，やや長めだが本書のために書き下した．この証明の源は Brouwer であるが，実際上は [Ros] が原典で，それを最初に2階算術の定理として書き下したのは [齋藤] である．しかし，[齋藤] の証明では本来の定理より弱い主張しか導けていなかったので，坂本伸幸氏と筆者(プレプリント) が一般形に発展させ，それを今回全面改訂して載せた．

文献リスト

[AdZ] Z. Adamowicz and P. Zbierski, *Logic of Mathematics*, Wesley Interscience, 1997.

[AFHL] S. Albeverio, J.E. Fenstad, R. Høegh-Krohn and T. Lindstrøm, *Nonstandard Methods in Stochastic Analysis and Mathematical Physics*, Aca-

demic Press, 1986.

[ArB] D.S. Arnon and B. Buchberger, *Algorithms in Real Algebraic Geometry*, Academic Press, 1988.

[BaN] F. Baader and T. Nipkow, *Term Rewriting and All That*, Cambridge University Press, 1998.

[BaM] D.W. Barnes and J.M. Mack, *An Algebraic Introduction to Mathematical Logic*, Springer-Verlag, 1975.

[Bar] J. Barwise (ed.), *Handbook of Mathematical Logic*, North-Holland, 1977.

[BaS] J. Barwise and J. Schlipf, Introduction to recursively saturated and resplendent models, J. Symbolic Logic 41, 531-536, 1976.

[Bus] S. Burris and H.P. Sankappanavar, *A Course in Universal Algebra*, Springer-Verlag, 1981.

[ChK] C.C. Chang and H.J. Keisler, *Model Theory* 3rd ed., North-Holland, 1990.

[Coh] P.M. Cohn, *Universal Algebra* 2nd ed., D. Reidel, 1986.

[Doe] K. Doets, *Basic Model Theory*, CSLI Publications, 1996.

[EFT] H.D. Ebbingaus, J. Flum and W. Thomas, *Mathematical Logic* 2nd ed., Springer-Verlag, 1994.

[End] H. Enderton, *A Mathematical Introduction to Logic*, Academic Press, 1972(2nd ed., 2001).

[Fef] S. Feferman, *In the Light of Logic*, Oxford University Press, 1998.

[HaP] P. Hâjek and P. Pudlâk, *Metamathematics of First-Order Arithmetic*, Springer-Verlag, 1993.

[HPS] D. Haskell, A. Pillay and C. Steinhorn, *Model Theory, Algebra, and Geometry*, Cambridge University Press, 2000.

[HiB] D. Hilbert and P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik, I, II*, Springer-Verlag, 1934, 1939(2nd ed., 1968, 1970).(吉田,渕野抄訳『数学の基礎』シュプリンガー・フェアラーク東京, 1993.)

[Hod] W. Hodges, *Model Theory*, Cambridge University Press, 1993.

[HoU] J.E. Hopcroft and J.D. Ullman, *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation*, Addison-Wesley, 1976.(野崎, 高橋, 町田, 山崎訳『オートマトン・言語理論・計算論 I, II』シュプリンガー・フェアラーク東京, 1986.)

[Hey] A. Heyting, *Axiomatic Projective Geometry*, North-Holland, 1980.

[Jac] N. Jacobson, *Basic Algebra, I, II*, Freeman, 1974(2nd ed. 1985)/1980.

[Kay] R. Kaye, *Models of Peano Arithmetic*, Oxford University Press, 1991.

[Kow] R. Kowalski, *Logic for Problem Solving*, North-Holland, 1979.

[KrK] G. Kreisel and J.L. Krivine, *Elements of Mathematical Logic*, revised printing, North-Holland, 1971.

[Lan] S. Lang, *Algebra* 3rd ed., Addison-Wesley, 1993.

[Mis] B. Mishra, *Algorithmic Algebra*, Springer-Verlag, 1993.

[Mon] J.D. Monk, *Mathematical Logic*, Springer-Verlag, 1976.

[Poi] B. Poizat, *A Course in Model Theory*, Springer-Verlag, 2000.

[Rog] H. Rogers, *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*, McGraw-Hill, 1967.

[Ros] P.C. Rosenbloom, An elementary constructive proof of the fundamental theorem of algebra, Ameri, Math. Monthly 52(1945)562-570.

[Sho] J.R. Shoenfield, *Mathematical Logic*, Addison-Wesley, 1967.

[Sim] S. Simpson, *Subsystems of Second-Order Arithmetic*, Springer-Verlag, 1999.

[Smo] C. Smorynski, *Logical Number Theory I*, Springer Verlag, 1991.

[STY] S. Simpson, K. Tanaka and T. Yamazaki, Some conservation results on weak König's lemma, Ann. Pure Appl. Logic, to appear.

[Tan] K. Tanaka, The self-embedding theorem of WKL_0 and a non-standard method, Ann. Pure Appl. Logic 84, 41-50, 1997.

[vDa] D. van Dalen, *Logic and Structure* 3rd ed., Springer-Verlag, 1994.

[vdW] B.L. van der Waerden, *Moderne Algebra I, II*, 2nd ed., Springer-Verlag, 1937, 1940.(銀林訳『現代代数学 1, 2, 3』, 東京図書, 1959, 1959, 1960.)

[笠戸] 笠井琢美-戸田誠之助, 計算の理論, 共立出版, 1993.

[菊池] 菊池 誠, On Gödel's Incompleteness Theorems, 博士論文, 東北大学, 1996.

[倉田] 倉田令二朗, 数学論序説, ダイヤモンド社, 1972.

[齋藤] 齋藤 晃, 「2階算術における関数解析の基礎」, 修士論文, 東北大学, 1996.

[篠田] 篠田寿一, 帰納的関数と述語, 河合文化教育研究所, 1997.

[高木] 高木貞治, 代数学講義 改訂新版, 共立出版, 1965.

[竹内] 竹内外史, 数学基礎論の世界, 日本評論社, 1972.

[田1] 田中一之編(田中, 鹿島, 角田, 菊池著), 数学基礎論講義, 日本評論社, 1997.

[田2] 田中一之, 逆数学と2階算術, 河合文化教育研究所, 1997.

[田3] 田中一之, 「ヒルベルトの第10問題」, 所収:杉浦光男編, ヒルベルト23の問題, 日本評論社, 1997.

[田4] 田中一之編・監訳, 数学の基礎をめぐる論争, シュプリンガー・フェアラーク東京, 1999.

[田5] 田中一之, 「ヒルベルトのプログラム」, 所収:数学セミナー編集部編, 20世紀の予想, 日本評論社, 2000.

[田尚] 田中尚夫, 選択公理と数学 増補版, 遊星社, 1999.

[坪井] 坪井明人, モデルの理論, 河合文化教育研究所, 1997.

[前原] 前原昭二, 記号論理入門, 日本評論社, 1967.

[森田] 森田康夫, 代数概論, 裳華房, 1987.

[山崎] 山崎 武, Model-theoretic studies on subsystems of second order arithmetic, 博士論文, 東北大学, 2000.

索　　引

ア　行

カ　行

サ　行

タ 行

ナ　行

ハ　行

マ 行

ヤ　行

ラ　行

著 者 略 歴

田 中 一 之（たなか かずゆき）

1978年東京工業大学理学部情報科学科卒．同大学院理工学研究科博士課程中退．1986年カリフォルニア大学バークレイ校Ph. D.（数学）．東京工業大学理学部助手，東北大学理学部助教授を経て，1997年より東北大学大学院理学研究科数学専攻教授．その間，ペンシルバニア州立大学(1990-91)とオックスフォード大学(1995)にて客員研究員．

主な著書：計算理論と論理プログラミング(共訳)(丸善, 1989)，数学基礎論講義(編著)(日本評論社, 1997)，逆数学と2階算術(河合文化教育研究所, 1997)，基礎課程線形代数学(共著)(培風館, 1998)，数学の基礎をめぐる論争(編・監訳)(シュプリンガー・フェアラーク東京, 1999)．

数の体系と超準モデル

2002年 4月25日　第1版発行

検印省略	著作者	田 中 一 之
	発行者	吉 野 達 治
	発行所	東京都千代田区四番町8番地 電　話　03-3262-9166～9 株式会社 裳 華 房
定価はカバーに表示してあります．	印刷所	横山印刷株式会社
	製本所	牧製本印刷株式会社

社団法人
自然科学書協会会員

ISBN4-7853-1530-X